Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра фундаментальної математики

“**ЗАТВЕРДЖУЮ**”

Проректор з науково-
педагогічної роботи

Олександр ГОЛОВКО

____

“______” ____________2022 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика, 113 – Прикладна математика**

освітня програма **«Математика», «Прикладна математика»**

вид дисципліни **обов’язкова**

факультет **математики і інформатики**

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

протокол № 7 від 29 серпня 2022 р.

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

Фаворов Сергій Юрійович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри фундаментальної математики

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол № 1 від 26 серпня 2022 року.

Завідувач кафедри Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)
програми
Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Прикладна математика»

Гарант освітньої (професійної)
програми Світлана ІГНАТОВИЧ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики.
протокол № 1 від 29 серпня 2022 року.

Голова науково-методичної комісії Ольга АНОЩЕНКО

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “ **КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ**”
складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **«бакалавр»**
спеціальності **111 – Математика, 113 – Прикладна математика**
освітня програма **«Математика», «Прикладна математика»**

1. Опис навчальної дисципліни

Мета викладання навчальної дисципліни полягає у наданні майбутнім спеціалістам знань у галузі сучасного комплексного аналізу.

Основними завданнями вивчення дисципліни э навчання студентів теоретичним основам і методам комплексного аналізу та застосуванню цих методів у інших математичнихдисциплінах.

Кількість кредитів – **7**

Загальна кількість годин – **210**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
5, 6 - й	
Лекції	
64 год.	
Практичні, семінарські заняття	
48 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
98 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	
розрахунково-графічні роботи (2)	

1.6. Заплановані результати навчання:

Знати :

- означення експоненти, логарифму, тригонометричних функцій комплексної змінної;
- різні похідні для комплекснозначних функцій, їх геометричний сенс;
- означення голоморфних функцій;
- зв’язок між гармонічними та голоморфними функціями;
- означення інтегралу вздовж кривої;
- теорему Коші; інтегральну формулу Коші;
- розвинення основних голоморфних функцій у ряди Тейлора та Лорана;
- нерівність Коші, теорему Ліувіля;
- теореми єдності для голоморфних функцій;
- класифікацію ізольованих особливостей голоморфної функції;
- принцип максимума модуля для голоморфних функцій;

- означення особливих точок; визначення характеру ізольованих особливих точок;
- означення лишків у скінченних та нескінченних ізольованих особливих точках;
- означення цілих та мероморфних функцій;
- розвинення Міттаг-Леффлера для мероморфних функцій;
- теореми Вейєрштрасса про розвинення цілих функцій у нескінченний добуток;
- геометричний зміст модулю та аргументу голоморфної функції;
- означення конформного відображення;
- зв'язок між конформними та голоморфними відображеннями;
- основні конформні відображення та їх властивості: дробово-лінійне, $z^n, \sqrt[n]{z}, e^z, \ln z$, функція Жуковського та обернена до неї;
- принцип аргументу , теорему Руше та теорему про збереження області;
- принцип симетрії Рімана-Шварца.

Уміти :

- знаходити логарифм та комплексну ступінь комплексного числа;
- перевіряти виконання умов Коші-Рімана;
- відновлювати голоморфну функцію за заданою дійсною частиною;
- знаходити розвинення голоморфних функцій у ряди Тейлора та Лорана;
- проводити класифікацію ізольованих особливостей голоморфних функцій;
- обчислювати лишки та рахувати криволінійні інтеграли за допомогою лишків;
- обчислювати основні типи невласних інтегралів за допомогою лишків;
- обчислювати деякі типи рядів за допомогою лишків;
- розкладати мероморфні функції в ряди за головними частями;
-будувати конформні відображення однозв'язних областей за допомогою основних конформних відображень: дробово-лінійного, $z^n, \sqrt[n]{z}, e^z, \ln z$, функції Жуковського, користуватися принципом симетрії Рімана-Шварца для побудови конформних відображень деяких областей.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ1. Основні поняття комплексного аналізу.

Тема 1. Комплексна площина та функції комплексної змінної.

1. Комплексні числа, дії з комплексними числами.
2. Означення функцій $z^n, \sqrt[n]{z}, e^z, \ln z$, тригонометричних функцій комплексної змінної.
3. Топологія комплексної площини, розширена комплексна площина, стереографічна проекція.
1. Функції комплексної змінної, криві, області.

Тема 2. Диференційованость функцій, голоморфні та гармонічні функції

1. R- та C- диференційованість функцій комплексної змінної.
2. Умови Коші-Рімана.
3. Означення голоморфної функції.
4. Геометричний зміст модулю та аргументу голоморфної функції.
5. Гармонічні функції. Властивості гармонічних функцій.
6. Зв'язок гармонічних та голоморфних функцій. Відновлення голоморфної функції за заданою дійсною частиною.

Тема 3. Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.

1. Означення інтегралу вздовж кривої та його властивості.
2. Зв'язок з криволінійними інтегралами.
3. Формула Ньютона-Лейбниця. Первісна.
4. Теорема Коші для трикутника.
5. Теорема Коші для замкненої кривій в однозв'язній області.
6. Теорема Коші для функції, неперервної в замкненій області.

Тема 4. Інтегральна формула Коші та її застосування

1. Інтегральна формула Коші.
2. Диференціювання інтегралу типа Коші.
3. Нескінченна диференційованість голоморфних функцій. Теорема Морери.
4. Теорема Вейєрштрасса про рівномірно збіжну послідовність голоморфних функцій.
5. Степеневі ряди.
6. Розклад голоморфної функції в степеневий ряд.
7. Нерівність Кошиі для коефіцієнтів степеневого ряду.
8. Теорема Ліувілля.

Розділ 2. Нулі, ізольовані особливості, лишки.

Тема 5. Нулі голоморфних функцій та беспосереднє аналітичне продовження.

1. Нулі голоморфних функцій
2. Перша теорема єдності.
3. Теорема проо те, що нулі не можуть згущатися.
4. Безпосереднє аналітичне продовження.
5. Особливості степеневого ряду на межі кола збіжності.

Тема 6. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.

1. Ряд Лорана, розклад голоморфної функції в ряд Лорана.
2. Визначення характеру ізольованих особливих точок.
3. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.
4. Лишки. Обчислювання лишків.
5. Теореми Коші про лишки.

Тема 7. Застосування теореми Коші про лишки.

1. Обчислення інтегралів по зімкненому контуру.
2. Лема Жордана
3. Обчислення інтегралів від тригонометричних функцій.
4. Обчислення невластивих інтегралів.

5. Підсумовування рядів.

Розділ 3. Подальші властивості голоморфних функцій.

Тема 8. Геометричні принципи теорії функцій.

1. Принцип аргументу.
2. Теореми Руше та Гурвіца.
3. Основна теорема алгебри.
4. Принцип збереження області.
5. Однолисті функції.
6. Обернення степеневих рядів.
7. Принцип максимуму модуля голоморфної функції.
8. Лема Шварца.

Тема 9. Властивості цілих та мероморфних функцій.

1. Означення цілих та мероморфних функцій.
2. Раціональні функції.
3. Розвинення Міттаг-Леффлера для мероморфних функцій.
4. Метод Коші розвинення для мероморфних функцій.
5. Каноничний множник Вейерштрасса.
6. Нескінчений добуток та його властивості.
7. Теореми Вейєрштрасса про розвинення цілих функцій у нескінченний добуток.

Розділ 4. Конформні відображення та їх застосування.

Тема 10. Елементарні конформні відображення.

1. Означення конформного відображення.
2. Необхідні та достатні умови конформності.
3. Дробово-лінійні відображення та їх властивості.
4. Функції z^n, $\sqrt[n]{z}$ та їх властивості.
5. Функції e^z, $\ln z$ та їх властивості.
6. Властивості функції Жуковського та оберненої до неї.
7. Побудова конформних відображення однозв'язних областей за допомогою основних функцій: дробово-лінійної, z^n, $\sqrt[n]{z}$, e^z, $\ln z$, функції Жуковського та оберненої до неї.

Тема 11. Основна теорема теорії конформних відображень.

1. Конформні автоморфізми та ізоморфізми.
2. Зв’язок між конформністю та голоморфністю для відображень.
3. Класи конформно-еквівалентних областей.
4. Теорема Пенлеве про зникнення особливостей.
5. Принцип симетрії Рімана-Шварца.

Тема 12. Задача Дирихле та її застосування в теорії конформних відображень

1. Задача Діріхле для круга. Формула Пуасона.
2. Задача Діріхле для однозв'язних областей.

3. Розв'язання задачі Діріхле для верхньої напівплощини.
4. Формула Крістофеля-Шварца.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ1. Основні поняття комплексного аналізу.												
Тема 1. Комплексна площина та функції комплексної змінної.	18	6*	2*			10						
Тема 2. Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції	18	6*	2*			10						
Тема 3. Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.	18	6*	2*			10						
Тема 4. Інтегральна формула Коші та її застосування	12	6*	2*			4						
Розділ 2. Нулі, ізольовані особливості, лишки.												
Тема 5. Нулі голоморфних функцій та беспосереднє аналітичне продовження.	14	6*	4*			4						
Тема 6. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.	16	6*	4*			6						
Тема 7. Застосування теореми Коші про лишки.	38	6*	1*2			20						
Розділ 3. Подальші властивості голоморфних функцій.												
Тема 8. Геометричні принципи теорії функцій	14	6*	2*			6						
Тема 9. Властивості цілих та мероморфних функцій.	12	6*	2*			4						
Розділ 4. Конформні відображення та їх застосування.												

Тема 10. Елементарні конформні відображення.	38	6*	12*			20						
Тема 11. Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень	12	4*	4*			4						
Усього годин	**210**	**64**	**48**			**98**						

)* Викладаються дистанційно, на платформі ZOOM

4. Теми семінарських (<u>практичних</u>, лабораторних) занять

Семестр 5.

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Комплексна площина та функції комплексної змінної.	2
2	Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції.	2
3	Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші	2
4	Інтегральна формула Коші та її застосування	2
5	Нулі голоморфних функцій та беспосереднє аналітичне продовження.	2
6	Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.	4
7	Застосування теореми Коші про лишки (простіші приклади)	2
	Разом	**16**

Семестр 6.

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Застосування теореми Коші про лишки (подальші приклади).	10
2	Геометричні принципи теорії функцій. .	2
3	Властивості цілих та мероморфних функцій	2
4	Елементарні конформні відображення..	16
5	Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень	2
	Разом	**32**

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Робота над розрахунково-графічними роботами та над домашніми завданнями протягом семестрів, що відповідають темам практичних занять:	
1	Комплексна площина та функції комплексної змінної (Розрахунково-графічна робота).	10
2	Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції	10
3	Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.	10
4	Інтегральна формула Коші та її застосування.	4

5	Нулі голоморфних функцій та беспосереднє аналітичне продовження.	4
6	Ряд Лорана та ізольовані особливі точки (Домашнє завдання).	6
7	Застосування теореми Коші про лишки.	20
8	Геометричні принципи теорії функцій (Домашнє завдання).	6
9	Властивості цілих та мероморфних функцій	4
10	Елементарні конформні відображення (Домашнє завдання)	20
11	Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень (Розрахунково-графічна робота)	4
	Разом	**98**

6. Індивідуальні завдання

розрахунково-графічні роботи (5 сем. – 1; 6 сем. – 1).

7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна).

8. Методи контролю

– облік відвідування аудиторних занять;
– перевірка виконання індивідуальних завдань (2) та контрольних робіт (2), підсумковий контроль (Залік, Екзамен).

9. Схема нарахування балів

Семестр 5

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання								Залік	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Розділ4	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Розрахунково-графічна робота	Колоквіум	Разом		
5	5	5	5	10	10	20	60	40	100

Семестр 6

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання							Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Розділ 4	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Розрахунково-графічна робота	Разом		

5	5	5	5	20	20	60	40	100

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 –69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	

1-49	незадовільно	не зараховано

10.Рекомендована література

Базова література

1. B.V. Shabat, Introduction to complex analysis. V.1, American Mathematical Society, 1992
2. Lavrentev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of function of complex variable. 1987, 544 p.
3. Edward C. Titchmarsh. The Theory of Functions. Oxford University Press; 2nd edition (May 13, 1976)
4.Комплексний аналіз. Приклади і задачі. (за редакцією В.Г.Самойленка). КНУ ім.Т.Шевченка., 2010.

Допоміжна література

1. M L.Alfors. Complex analysis. N.J.,”Kluver”, 1981.
2. M.A. Evgrafov. Analytic functions. Dover Publications; Translation edition (September 18, 2019)