

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра прикладної математики

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Проректор  
з науково-педагогічної роботи  
Олександр ГОЛОВКО

\_\_\_\_\_ 2022 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**Варіаційне числення та оптимальне керування**

(назва навчальної дисципліни)

рівень вищої освіти перший (бакалаврський)

галузь знань 11– Математика та статистика

спеціальність 113 – Прикладна математика, 111 – Математика  
(шифр і назва)

освітня програма Прикладна математика, Математика  
(шифр і назва)

спеціалізація \_\_\_\_\_  
(шифр і назва)

вид дисципліни обов'язкова  
(обов'язкова / за вибором)

факультет математики і інформатики

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

“29” серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: **Бebія Максим Отарійович**, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики

Програму схвалено на засіданні кафедри Прикладної математики

Протокол від “29” серпня 2022 року № 11

Завідувач кафедри Прикладної математики



Валерій КОРОБОВ

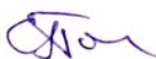
Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми (керівником проектної групи)

Прикладна математика

назва освітньої програми

Гарант освітньо-професійної програми

(керівник проектної групи) Прикладна математика



Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми (керівником проектної групи)

Математика

назва освітньої програми

Гарант освітньо-професійної програми

(керівник проектної групи) Математика



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

.

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

Протокол від “29” серпня 2022 року, протокол № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики



Ольга АНОЩЕНКО

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Варіаційне числення та оптимальне керування”  
складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки

бакалавр

(назва рівня вищої освіти)

спеціальності (напрямку) 113 – Прикладна математика, 111–Математика

спеціалізації \_\_\_\_\_

### 1. Опис навчальної дисципліни

#### 1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни “Варіаційне числення та оптимальне керування” є навчання майбутніх спеціалістів сучасним методам варіаційного числення та оптимізації, в тому числі у теорії оптимального керування.

#### 1.2. Основні завдання вивчення дисципліни

Основними завданнями є оволодіння основами теорії екстремальних задач та розвинення здатності ефективно застосовувати методи оптимізації до розв’язання конкретних практичних задач.

#### 1.3. Кількість кредитів – 4

#### 1.4. Загальна кількість годин –120

#### 1.5. Характеристика навчальної дисципліни

<u>обов’язкова</u>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	–
Семестр	
6-й	–
Лекції	
32 год.	–
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	–
Лабораторні заняття	
–	–
Самостійна робота	
56 год.	–
в тому числі Індивідуальне завдання	
-	

## 1.6. Заплановані результати навчання

### **Знати :**

постановку задачі варіаційного числення, рівняння Ейлера як необхідну умову екстремуму першого порядку, умови екстремуму другого порядку в задачі варіаційного числення, метод множників Лагранжа, критерії керованості лінійних систем, критерії спостережуваності лінійних систем, методи дослідження задач оптимальної стабілізації, постановку задачі оптимального керування, принцип максимуму Понтрягіна.

### **Вміти :**

розв'язувати задачі за вивченими розділами.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### Розділ 1. Задача варіаційного числення

#### **Тема 1. Рівняння Ейлера.**

Постановка задачі варіаційного числення, приклади. Поняття варіації. Рівняння Ейлера як необхідна умова екстремуму першого порядку. Екстремалі. Задачі з рухомими кінцями. Необхідні умови у задачі Больца та ізопериметричній задачі.

#### **Тема 2. Необхідні і достатні умови другого порядку для слабкого екстремуму.**

Сильний та слабкий екстремум. Поняття другої варіації. Необхідна умова Лежандра. Спряжені точки. Необхідна умова Якобі. Достатні умови другого порядку для слабкого екстремуму.

#### **Тема 3. Умови сильного екстремуму.**

Поняття поля екстремалей. Необхідна і достатня умова Вейерштрасса.

### Розділ 2. Теорія керування

#### **Тема 4. Керованість лінійних систем.**

Постановка задачі керованості. Керованість лінійних систем, критерій Калмана. Побудова керувань, що розв'язують задачу потрапляння із токи в точку за заданий час для повністю керованих лінійних систем.

#### **Тема 5. Спостережуваність лінійних систем.**

Постановка задачі спостережуваності. Критерії спостережуваності для лінійних систем.

#### **Тема 6. Керування нелінійними системами.**

Керованість та стабілізованість нелінійних трикутних систем. Теорема Коробова. Відображення трикутних систем на лінійні. Знаходження оберненого відображення.

### Розділ 3. Задача оптимального керування

#### **Тема 7. Лінійна задача швидкодії.**

Постановка лінійної задачі швидкодії. Множина досяжності і її властивості. Принцип максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії.

#### **Тема 8. Загальна задача оптимального керування.**

Постановка загальної задачі оптимального керування. Формулювання принципу максимуму Понтрягіна. Умови трансверсальності. Задача варіаційного числення як задача оптимального керування.

#### **Тема 9. Задача оптимальної стабілізації.**

Постановка задачі оптимальної стабілізації. Перша теорема Красовського.

### 3. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7
<b>Розділ 1. Задача варіаційного числення</b>						
Тема 1. Рівняння Ейлера.	14	6	4			4
Тема 2. Необхідні і достатні умови другого порядку для слабкого екстремуму.	14	4	4			6
Тема 3. Умови сильного екстремуму.	10	2	2			6
<i>Контрольна робота</i>	2		2			
<b>Разом за розділом 1</b>	<b>40</b>	<b>12</b>	<b>12</b>			<b>16</b>
<b>Розділ 2. Теорія керування</b>						
Тема 4. Керованість лінійних систем.	15	4	2			9
Тема 5. Спостережуваність лінійних систем.	12	2	2			8
Тема 6. Керування нелінійними системами.	11	2	2			7
<b>Разом за розділом 2</b>	<b>38</b>	<b>8</b>	<b>6</b>			<b>24</b>
<b>Розділ 3. Задача оптимального керування</b>						
Тема 7. Лінійна задача швидкодії.	17	6	6			5
Тема 8. Загальна задача оптимального керування.	12	4	4			4
Тема 9. Задача оптимальної стабілізації.	11	2	2			7
<i>Контрольна робота</i>	2		2			
<b>Разом за розділом 3</b>	<b>42</b>	<b>12</b>	<b>14</b>			<b>16</b>
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>

### 4. Темі практичних занять

№	Назва розділу або теми	Кількість годин
1	Задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера.	2
2	Задача Больца, ізопериметрична задача	2
3	Умови другого порядку слабкого екстремуму в задачі варіаційного числення.	4
4	Умови сильного екстремуму.	2
5	Контрольна робота з варіаційного числення.	2
6	Теорія керування. Керованість лінійних систем.	2
7	Спостережуваність лінійних систем.	2
8	Керування нелінійними системами.	2
9	Задача керованості в теорії оптимального керування. Лінійні керовані системи. Потрапляння з обмеженим керуванням.	2

10	Задача лінійної швидкодії, принцип максимуму Понтрягіна.	2
11	Задача найшвидшої зупинки візка, задача зупинки маятника.	2
12	Загальна задача оптимального керування, принцип максимуму Понтрягіна.	2
13	Умова трансверсальності.	2
14	Контрольна робота	2
15	Задача оптимальної стабілізації.	2
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Розв'язування задач з теми «Задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера, екстремалі».	4
2	Виконання домашніх завдань з теми «Умова Лежандра. Рівняння Якобі, знаходження спряжених точок».	6
3	Виконання домашніх завдань з теми «Поле екстремалей. Функція Вейерштрасса».	6
4	Вивчення літератури з теми «Керованість лінійних систем. Канонічна форма».	9
5	Розв'язування задач з теми «Спостережуваність лінійних систем».	8
6	Вивчення літератури з теми «Керування нелінійними системами. Відображуваність нелінійних систем».	7
7	Навести приклади з теми «Лінійна задача керованості, побудова допустимих керувань».	1
8	Дослідити питання про час потрапляння з більшою кількістю перемикачів по темі «Лінійна задача швидкодії. Задача найшвидшої зупинки візка, побудова кривої перемикачів».	4
9	Розв'язування задач з теми «Задача оптимального керування. Принцип максимуму Понтрягіна та його застосування для знаходження екстремальних керувань».	2
10	Вивчення літератури з теми «Задача оптимального керування з рухомими кінцями, умова трансверсальності».	2
11	Виконання домашніх завдань з теми «Задача оптимальної стабілізації».	3
12	Вивчення літератури з теми «Експоненціальна стабілізація».	4
	<b>Разом</b>	<b>56</b>

### 6. Індивідуальне завдання

*Не передбачені*

## 7. Методи навчання

Лекції з використанням частково-пошукового методу, проблемні лекції, пояснення, розрахункові та пояснювально-ілюстративні методи при проведенні практичних занять.

## 8. Методи контролю

1. Перевірка виконання домашніх завдань
2. Облік відвідування аудиторних або дистанційних занять
3. Перевірка контрольних робіт
4. Усне опитування
5. Перевірка екзаменаційної роботи

## 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання						Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Контрольні роботи, передбачені навчальним планом	Індивідуальне завдання	Разом		
T1–T3	T4–T6	T7-T9					
15	15	10	20	---	60	40	100

T1–T9 – теми розділів.

Поточний контроль, самостійна робота – до 40 балів,  
контрольні роботи – до 20 балів,  
екзаменаційна робота – до 40 балів.

## Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
	для <i>чотирирівневої</i> шкали оцінювання
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

## Критерії оцінювання навчальних досягнень

**Поточний контроль** враховує активність під час практичних занять та правильність виконання домашніх завдань, за кожне з яких разом можна отримати до 4 балів.

**Перша контрольна** робота полягає у розв'язанні задачі варіаційного числення. **Друга контрольна** робота полягає у розв'язанні задачі оптимального керування. Кожна з робіт оцінюється максимум у 10 балів відповідно до правильності та повноти розв'язання.

**Екзаменаційний білет** складається з двох теоретичних питань та однієї задачі. Кожне з теоретичних питань оцінюється максимум у 15 балів. Максимальну кількість балів можна

отримати, якщо сформулювати та довести відповідні твердження, навести необхідні приклади. Якщо студент правильно описав ідею доведення, але не зміг до кінця привести відповідні викладки, то він отримує максимум 12 балів. У випадку, коли студент зробив помилки при формулюванні тверджень або не зміг пояснити ідею доведення чи навести приклади, він отримує максимум 5 балів. Максимальна оцінка за задачу складає 10 балів. Незначні арифметичні помилки, які якісно не вплинули на результат, не впливають на кількість балів.

## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізації. – К.: Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка, 2010. - 212 с.
2. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К.: Либідь, 1994. – 328 с.
3. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
4. Моклячук М. П. Збірник задач з варіаційного числення та методів оптимізації.– Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. – 255 с.
5. John A. Burns, Introduction to the calculus of variations and control with modern applications. – CRC Press Taylor & Fransis Group, Boca Raton, 2014. – 544 p.
6. E.B. Lee and L. Markus, Foundations of optimal control theory. – John Wiley, New York, 1967. – 576 p.

### Допоміжна література

7. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishechenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes. – John Wiley & Sons, New York-London, 1962.–360 p.
8. Піддубний О.М., Харкевич Ю.І. Варіаційне числення та методи оптимізації. Луцьк: Східноєвроп. нац. ун-т імені Лесі України, 2017. – 332 с.
9. Клименко М.І., Панасенко Є.В., Стреляєв Ю.М., Ткаченко І. Г. Варіаційне числення та методи оптимізації. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 84 с.

## 11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. [https://en.wikipedia.org/wiki/Calculus\\_of\\_variations](https://en.wikipedia.org/wiki/Calculus_of_variations)
2. [https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal\\_control](https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal_control)