

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Кафедра фундаментальної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

В.о. декана факультету математики
і інформатики

Євген МЕНЯЙЛОВ



серпень 2025 р.

Робоча програма навчальної дисципліни
Еволюційні системи

рівень вищої освіти **перший (бакалаврський)**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітньо-професійна програма - **Математика**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2025 / 2026 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

26 серпня 2025 року, протокол № 10

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Півень Олексій Леонідович – кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної математики**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол від 26 серпня 2025 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика».

Гарант освітньої (наукової)
програми



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і
інформатики.

Протокол від 26 серпня 2025 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**Еволюційні системи**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр**
спеціальність **111 Математика**
освітня програма «**Математика**»

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни «*Еволюційні системи*» є надання майбутнім спеціалістам знань та застосувань з таких класів еволюційних систем: диференціально-алгебраїчних, різницевих рівнянь та систем еволюційних різницевих рівнянь.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни «*Еволюційні системи*» є

- а) Вивчення теорії, застосування та методів побудови розв'язків диференціально-алгебраїчних рівнянь,
- б) Вивчення теорії, застосування, та методів побудови розв'язків різницевих рівнянь.

1.3. Кількість кредитів – 4

1.4. Загальна кількість годин – 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
За вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
5-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
у тому числі Індивідуальні завдання	
-	

1.6. Перелік компетентностей, що формує дана дисципліна

Програма вивчення вибіркової навчальної дисципліни «Еволюційні системи» передбачає засвоєння основних понять теорії різницевих та диференціально-алгебраїчних рівнянь і розвиток навичок розв'язання цих класів рівнянь.

1.6.1. Формування наступних інтегральної та загальних компетентностей

ІК - Здатність розв'язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп'ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

1.6.2. Формування наступних фахових компетентностей

ФК01. Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК03. Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.

ФК08. Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

1.7. Перелік результатів навчання, що формує дана дисципліна

Програмні результати навчання за ОПП:

РН16. Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.

РН18. Знати теоретичні основи і застосовувати методи теорії функцій комплексної змінної.

1.8. Пререквізити: Математичний аналіз, Диференціальні рівняння, Лінійна алгебра.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Класичні лінійні різницеві рівняння та системи

Тема 1. Лінійні різницеві рівняння першого порядку та їх застосування.

Поняття різницевого рівняння. Застосування різницевих рівнянь першого порядку (модель інвестування, та дискретна модель зростання, ханойські башти). Однорідне та неоднорідне лінійне різницеве рівняння. Метод варіації сталих розв'язання різницевого рівняння.

Тема 2. Властивості розв'язків лінійних різницевих рівнянь вищого порядку.

Лінійне рівняння вищого порядку.

Фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

Тема 3. Лінійні різницеві стаціонарні рівняння та їх застосування.

Фундаментальна система розв'язку та побудова загального розв'язку однорідного рівняння. Побудова часткового розв'язку неоднорідного рівняння для спеціальної правої частини. Застосування лінійних різницевих рівнянь другого порядку (числа Фібоначчі та ймовірність банкрутства азартного гравця).

Тема 4. Нормальні еволюційні системи різницевих рівнянь та їх застосування.

Поняття еволюційної системи різницевих рівнянь. Застосування еволюційних систем різницевих рівнянь (модель Леслі та дискретна модель Леонтьєва). Існування та єдиність розв'язку початкової задачі для системи, явний вигляд розв'язку. Зведення рівняння

вищого порядку до нормальної системи рівнянь першого порядку. Фундаментальна система розв'язків.

Тема 5. Лінійні стаціонарні системи різницьових рівнянь

Явний вигляд фундаментальної матриці розв'язків. Побудова фундаментальної системи розв'язків з використанням жорданової форми матриць.

Тема 6. Лінійні різницеві рівняння над комутативними кільцями.

Класичне і неявне різницеве рівняння. Єдиність розв'язку неявних лінійних різницьових рівнянь. Побудова квазіполіноміальних і періодичних розв'язків.

Розділ 2. Диференціально-алгебраїчні рівняння і неявні лінійні стаціонарні системи різницьових рівнянь.

Тема 7. Поняття диференціально-алгебраїчного рівняння. Приклади диференціально-алгебраїчних рівнянь

Диференціально-алгебраїчне рівняння та його відмінність від систем звичайних диференціальних рівнянь. Модель Леонт'єва

Тема 8. Жмутки матриць

Матричні функції. Регулярні та сингулярні жмутки матриць. Індекс матриці та індекс жмутка матриць.

Тема 9. Спектральні проектори

Спектральні проектори та методи обчислення спектральних проекторів.

Тема 10. Існування та єдиність розв'язку лінійного диференціально - алгебраїчного рівняння.

Теорема існування та єдиності розв'язку лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь
Формула варіації сталих та її застосування у побудові наближеного розв'язку.

Тема 11. Неявні лінійні стаціонарні системи різницьових рівнянь.

Відмінність від явних стаціонарних систем. Теорема існування та єдиності розв'язку, явний вигляд розв'язку. Критерій існування та єдиності розв'язку системи неявних лінійних різницьових рівнянь.

1. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин	
	Денна форма	Заочна форма

	Усього	у тому числі					Усього	у тому числі				
		л	п	лаб	ін д	ср		л	п	ла б	ін д	ср
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1 Різницеві рівняння												
Тема 1. Лінійні різницеві рівняння першого порядку та їх застосування.	16	4	4			8						
Тема 2. Властивості розв'язків лінійних різницевих рівнянь.	16	4	4			8						
Тема 3. Лінійні різницеві стаціонарні рівняння та їх застосування.	16	4	4			8						
Тема 4. Нормальні еволюційні системи різницевих рівнянь та їх застосування.	16	4	4			8						
Тема 5. Лінійні стаціонарні системи різницевих рівнянь та їх застосування	14	4	2			8						
Тема 6. Лінійні різницеві рівняння над комутативними кільцями.	8	2	2			4						
Разом за розділом 1	86	22	20			44						
Розділ 2. Диференціально-алгебраїчні рівняння і неявні лінійні стаціонарні системи різницевих рівнянь.												
Тема 7. Поняття диференціально-алгебраїчного рівняння. Приклади застосування диференціально-алгебраїчних рівнянь	6	2	2			2						
Тема 8. Жмутки матриць	6	2	2			2						
Тема 9. Спектральні проєктори	6	2	2			2						

Тема 10 Існування та єдиність розв'язку лінійного диференціально - алгебраїчного рівняння.	6	2	2			2						
Тема 11. Неявні лінійні стаціонарні системи різницевого рівняння.	6	2	2			2						
Контрольна робота	4		2			2						
Разом за розділом 2	34	10	12			12						
Усього годин	120	32	32			56						

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Лінійні різницеві рівняння першого порядку та їх застосування	4
2	Властивості розв'язків лінійних різницевого рівнянь	4
3	Лінійні різницеві стаціонарні рівняння	4
4	Нормальні еволюційні системи різницевого рівняння	4
5	Лінійні стаціонарні системи різницевого рівняння та їх застосування	2
6	Неявні лінійні стаціонарні системи різницевого рівняння.	2
7	Поняття диференціально-алгебраїчного рівняння. Приклади застосування диференціально-алгебраїчних рівнянь	2
8	Жмутьки матриць	2
9	Спектральні проектори	2
10	Існування та єдиність розв'язку лінійного диференціально - алгебраїчного рівняння	2
11	Неявні лінійні стаціонарні системи різницевого рівняння.	2
12	Контрольна робота	2
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Виконання домашніх завдань за розділом «Класичні лінійні різницеві рівняння та системи»	44
2	Виконання домашніх завдань за розділом «Диференціально-алгебраїчні рівняння і неявні лінійні стаціонарні системи різницевого рівняння.»	12
	Разом	56

6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом.

7. Методи навчання

Використовуються пояснювально-ілюстративний, (лекції і практичні заняття), репродуктивний (виконання домашніх завдань)) і частково-пошуковий (контрольні роботи) методи.

8. Методи контролю

Поточне опитування, контрольна робота (1), підсумковий контроль – залік.

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання				Залікова робота	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом		
T1–T6	T7–T11	T1–T11			
10	10	40	60	40	100

T1, T2 ... – теми розділів.

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання

Поточний контроль: 20 балів – бали нараховуються за виконання домашніх завдань і активність під час практичних занять.

Контрольна робота оцінюється до 40 балів і складається з 8 завдань, максимальна оцінка за кожне з завдань – 5 балів:

- (а) обчислення незакінчені або містять суттєві помилки — 0–1 бал;
- (б) обчислення правильні, можливі незначні помилки, але обґрунтування не наведено — 2–3 бали;
- (с) обчислення правильні, можливі незначні помилки, наведено повне обґрунтування — 4–5 балів.

Підсумкова залікова робота складається з 4 завдань:

1. У завданні 1 максимальна оцінка 10 балів.

- (а) твердження сформульовано з помилками— 0–4 бали;
- (б) твердження сформульовано з незначними помилками та без прикладів. — 6–8 балів;
- (с) твердження сформульовано вірно, наведено приклади — 9–10 балів.

2. У завданнях 2, 3, 4 максимальна оцінка 10 балів:

- (а) обчислення незакінчені або містять суттєві помилки — 0–4 бали;
- (б) обчислення правильні, можливі незначні помилки, але обґрунтування не наведено — 5–7 балів;
- (с) обчислення правильні, можливі незначні помилки, наведено повне обґрунтування — 8–10 балів.

Бали, отримані за виконання всіх завдань, сумуються (максимальна кількість – 40 балів) і додаються до балів, отриманих за практичні завдання. Максимальна сума – 100 балів. Оцінка виставляється за стандартною шкалою оцінювання.

Шкала оцінювання: дворівнева

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
50-100	зараховано
1-49	не зараховано

10. Рекомендована література

Основна література

- Різницьві рівняння: Методичні вказівки до самостійної роботи студентів всіх технічних спеціальностей / Укладачі: Волкова М.Г., Козін О. Б., Тарасенко І.В., Одеса, 2023. 32 с.
- Самойленко А.М., Шкіль М. І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням.— К: Вища школа, 2000— 296 с
- Олійник А.С., Петравчук А.П. Дискретна математика. Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. – К.: 2024.—177 с.

Допоміжна література

- Elaydi, S. An Introduction to Difference Equations, Springer-Verlag New York, pp. 540 (2005)
- Campbell S. Singular systems of differential equations I. – New-York-San-Francisco – London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. – 176 p.
- Vlasenko L.A., Perestyuk N.A., On the Solvability of Impulsive Differential-Algebraic Equations. Ukr. Math. J. – 2005. – V.57. – P. 551–564.

4. Kelley, W.G., Peterson, A.C.: Difference Equation: An Introduction with Applications, Second Edition, Academic Press, pp. 404 (2001)
5. Geftter S.L., Piven A.L., Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation in Banach and Locally Convex Spaces. // J. Math. Physics, Analysis, Geometry.–2019.– V. 15, № 3.– P. 336 – 353.
6. Campbell S., Singular systems of differential equations II .– New-York-San-Francisco – London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program,1982.–234 p.
7. S.Geftter, A. Goncharuk, A. Piven', Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. In: Elaydi, S., Kulenovic, M.R.S., Kalabusic, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics\& Statistics, vol 416, Springer, Cham.–2023.–P. 199–216.