

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Декан факультету  
математики і інформатики

Еригорій ЖОЛТКЕВИЧ



30 " 08 2023 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

"Рівняння з частинними похідними - II"

рівень вищої освіти **магістр**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2023 / 2024 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2023 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**д.ф.-м.н., старший науковий співробітник, професор кафедри фундаментальної математики Шепельський Дмитро Георгійович**



Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики протокол від 28 серпня 2023 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика».

Гарант освітньої (наукової)  
програми



Вячеслав ГОРДЕВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики протокол від 29 серпня 2023 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Ольга АНОЩЕНКО

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ-II” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки «магістр» спеціальності **111 – Математика** освітня програма «Математика»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є продовження навчання майбутніх магістрів основам теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та її застосування до дослідження нелінійних диференціальних рівнянь.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є ознайомлення майбутніх магістрів з основними методами дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1.3. Кількість кредитів: **7**

1.4. Загальна кількість годин: **210**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
<b>1-й</b>	
Семестр	
<b>2-й</b>	
Лекції	
<b>22 год.</b>	
Практичні, семінарські заняття	
<b>22 год.</b>	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
<b>166 год.</b>	
у тому числі індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання:

**знати:**

- основні ідеї застосування теорії полугруп до дослідження диференціальних рівнянь;
- основні ідеї застосування варіаційних методів до дослідження диференціальних рівнянь;
- основні ідеї застосування неваріаційних методів (монотонності, нерухомої точки, стискаючих зображень) до дослідження диференціальних рівнянь;

**уміти:**

- застосовувати ідеї теорії полугруп до дослідження параболічних та гіперболічних рівнянь другого порядку;
- отримувати та досліджувати рівняння Ейлера-Лагранжа;
- застосовувати поняття коерцитивності, напівнеперервності знизу, опуклості для дослідження мінімізуючих функцій;
- застосовувати теореми Шаудера і Шефера про нерухому точку до дослідження диференціальних рівнянь.

- Знати основні типи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, методи дослідження розв'язків. Уміти застосовувати ці методи для дослідження загальних еліптичних, параболічних та гіперболічних рівнянь другого порядку, у тому числі рівнянь, що виникають у фізичних моделях, використовувати методи побудови наближених розв'язків (програмний результат навчання РН02).

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### Розділ 1. Теорія полугруп для дослідження диференціальних рівнянь

- **Тема 1.** *Основні ідеї теорії полугруп.*  
Означення теорії полу груп, елементарні властивості. Диференціальні властивості. Властивості резольвенти.
- **Тема 2.** *Твірні оператори стискаючих полугруп.*  
Теорема Хіллі-Йосіди.
- **Тема 3.** *Застосування теорії полугруп до параболічних рівнянь другого порядку.*  
Параболічне рівняння як стискаюча полугрупа.
- **Тема 4.** *Застосування теорії полугруп до гіперболічних рівнянь другого порядку.*  
Гіперболічне рівняння як стискаюча полугрупа.

### Розділ 2. Варіаційні методи дослідження диференціальних рівнянь

- **Тема 5.** *Основні ідеї варіаційних методів.*  
Перша варіація. Рівняння Ейлера-Лагранжа. Друга варіація.
- **Тема 6.** *Рівняння Ейлера-Лагранжа для систем.*  
Нуль-лагранжиани. Детермінанти як нуль-лагранжиани.
- **Тема 7.** *Мінімізуючі функції.*  
Існування мінімізуючих функцій. Коерцитивність, напівнеперервність знизу. Опуклість.
- **Тема 8.** *Слабкі розв'язки рівняння Ейлера-Лагранжа.*  
Мотивація для розглядання слабких розв'язків рівняння Ейлера-Лагранжа. Системи рівнянь.
- **Тема 9.** *Регулярність мінімізуючих функцій.*  
Оцінка другої похідної. Друга похідна мінімізуючих функцій. Вища регулярність.
- **Тема 10.** *Задачі з обмеженнями.*  
Нелінійні задачі на власні значення. Однобічні обмеження. Гармонічні зображення.

### Розділ 3. Неваріаційні методи дослідження диференціальних рівнянь.

- **Тема 11.** *Методи монотонності та нерухомої точки.*  
Енергетичні оцінки. Існування та єдність слабого розв'язку. Строго стискаючі відображення. Терми Банаха про нерухому точку. Теореми Шаудера і Шефера про нерухому точку.

## 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	у тому числі				
л		п	лаб.	інд.	с. р.	
1	2	3	4	5	6	7
<b>Розділ 1. Теорія полугруп для дослідження диференціальних рівнянь</b>						
Тема 1. Означення теорії полугруп, елементарні властивості. Властивості резольвенти.	20	2	2			16
Тема 2. Твірні оператори стискуючих полугруп. Теорема Хілле-Йосіди.	16	2	2			12
Тема 3. Застосування до параболічних рівнянь другого порядку.	16	2	2			12
Тема 4. Застосування до гіперболічних рівнянь другого порядку.	16	2	2			12
<b>Разом за розділом 1</b>	<b>68</b>	<b>8</b>	<b>8</b>			<b>52</b>
<b>Розділ 2. Варіаційні методи дослідження диференціальних рівнянь</b>						
Тема 5. Основні ідеї методів. Перша варіація. Рівняння Ейлера-Лагранжа. Друга варіація.	20	2	2			16
Тема 6. Рівняння Ейлера-Лагранжа для систем. Нуль-лагранжиани.	18	2	2			14
Тема 7. Існування мінімізуючих функцій. Коерцитивність, напівнеперервність знизу. Опуклість.	18	2	2			14
Тема 8. Слабкі розв'язки рівняння Ейлера-Лагранжа.	20	2	2			16
Тема 9. Регулярність мінімізуючих функцій.	20	2	2			16
Тема 10. Задачі з обмеженнями. Нелінійні задачі на власні значення. Однобічні обмеження.	18	2	2			14
<b>Разом за розділом 2</b>	<b>114</b>	<b>12</b>	<b>12</b>			<b>90</b>
<b>Розділ 3. Неваріаційні методи дослідження диференціальних рівнянь</b>						
Тема 11. Методи монотонності та нерухомої точки. Енергетичні оцінки. Існування та єдність слабого розв'язку. Строго стискуючі відображення. Терема Банаха про нерухому точку. Теореми Шаудера і Шефера про нерухому точку.	20	2	2			16
<b>Разом за розділом 3</b>	<b>20</b>	<b>2</b>	<b>2</b>			<b>16</b>
Підготовка до заліку/екзамену	8					8
<b>Усього годин</b>	<b>210</b>	<b>22</b>	<b>22</b>			<b>166</b>

## 4. Темі практичних занять

№	Назва теми	Кількість
---	------------	-----------

з/п		годин
1	Елементарні властивості полугруп. Властивості резольвенти. Твірні оператори стискуючих полугруп.	2
2	Застосування теорії полугруп до параболічних рівнянь другого порядку.	2
3	Застосування теорії полугруп до гіперболічних рівнянь другого порядку.	2
4	Застосування варіаційних методів. Рівняння Ейлера-Лагранжа. Перша та друга варіації.	2
5	Рівняння Ейлера-Лагранжа для систем.	2
6	Слабкі розв'язки рівняння Ейлера-Лагранжа.	2
7	Приклади задач з однобічними обмеженнями.	2
8	Нелінійні задачі на власні значення.	2
9	Аналіз задач з обмеженнями. Однобічні обмеження.	2
10	Застосування методів монотонності та енергетичних оцінок.	2
11	Застосування теореми Банаха про нерухому точку. Застосування теорем Шаудера і Шефера про нерухому точку.	2
	<b>Разом</b>	<b>22</b>

### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання теоретичного матеріалу з використанням конспекту лекцій та рекомендованої літератури:	
1	Властивості полугруп. Властивості резольвенти. Твірні оператори стискуючих полугруп (Домашнє завдання).	16
2	Стискуючі полу групи. Застосування теорії полугруп до параболічних рівнянь другого порядку.	12
3	Застосування теорії полугруп до гіперболічних рівнянь другого порядку (Домашнє завдання).	12
4	Рівняння Ейлера-Лагранжа для систем. Нуль-лагранжиани.	12
5	Застосування коерцитивності, напівнеперервності знизу, опуклості для доведення існування мінімізуючих функцій.	16
6	Задачі з обмеженнями. Існування мінімізуючих функцій.	14
7	Варіаційна характеристика мінімізуючих функцій.	14
8	Застосування методів монотонності. Побудова наближених розв'язків. Єдиність слабких розв'язків (Домашнє завдання).	16
9	Застосування теореми Банаха про нерухому точку до дослідження рівняння реакції-дифузії (Домашнє завдання).	16
10	Застосування теореми Шаудера про нерухому точку до дослідження квазілінійних еліптичних рівнянь.	14
11	Застосування теореми Шефера до дослідження квазілінійних еліптичних рівнянь.	16
	Підготовка до заліку/екзамену	8
	<b>Разом</b>	<b>166</b>

## 6. Індивідуальні завдання

*Не передбачені планом*

## 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

## 8. Методи контролю

Навчання здійснюється у формі лекцій, практичних занять, а також у формі самостійної роботи (опрацювання навчального матеріалу, розв'язання учбових задач). Методи контролю: поточний (домашні завдання); контрольна робота, підсумковий семестровий екзамен.

## 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль та самостійна робота											Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Ра- зом	Екза- мен	Сума
Розділ 1				Розділ 2					Розділ 3					
Т 1	Т 2	Т 3	Т 4	Т 5	Т 6	Т 7	Т 8	Т 9	Т 10	Т 11				
4	4	4	4	4	3	3	3	3	4	4	20	60	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

## Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано,

		деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. Evans L.C. Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.
2. Craig W., A Course on Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics 197, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2018.
3. Lions J. L., Magenes E., Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1972.

### Допоміжна література

4. Engel K.-J., Nagel R., A Short Course on Operator Semigroups, Universitext, Springer Science+Business Media, 2006.
5. J. L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.
6. R. Showalter, Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations, AMS Providence, 1997.

## 11. Посилання на інформаційні ресурси

Wolfram Math World: <http://mathworld.wolfram.com/topics/PartialDifferentialEquations.html>

Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Differential\\_equation#Partial\\_differential\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation#Partial_differential_equations)

MathOverflow: <http://mathoverflow.net/questions/tagged/differential-equations>



