

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”
Декан факультету
математики і інформатики
Григорій ЖОЛТКЕВИЧ
“ 18 ” 08 2024 р.



Робоча програма навчальної дисципліни

Сучасна теорія оптимального керування

рівень вищої освіти **другий(магістерський)**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **Математика**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики
“27” серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: **Коробов Валерій Іванович**, доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри.

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики протокол від 26 серпня 2024 року № 8.
Завідувач кафедри Прикладної математики



(підпис)

Валерій КОРОБОВ

(прізвище та ініціали)

Гарант освітньо-професійної програми Математика



(підпис)

Вячеслав ГОРДЕВСЬКИЙ

(прізвище та ініціали)

Гарант освітньо-наукової програми Математика



(підпис)

Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

(прізвище та ініціали)

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики
і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

Протокол від “27” серпня 2024 року, протокол № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Сучасна теорія оптимального керування» складена відповідно до освітньо-професійної та освітньо-наукової програм підготовки

магістр

(назва рівня вищої освіти)

спеціальності (напрямку) 111 – Математика

спеціалізації _____

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни «Сучасна теорія оптимального керування» є надання майбутнім магістрам знань у галузі сучасних методів дослідження задач теорії керування та їх застосування.

1.2. Основні завданнями вивчення дисципліни

Основні завдання вивчення навчальної дисципліни «Сучасна теорія оптимального керування» – навчити студентів ставити і розв'язувати задачі керованості й оптимального керування для лінійних і нелінійних керованих систем, зводити лінійні задачі до проблеми моментів, а також навчити методів розв'язання проблеми моментів.

1.3. Кількість кредитів 6

1.4. Загальна кількість годин 180

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Обов'язкова	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
1-й	
Семестр	
2-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
116 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	
	год.

1.6. Заплановані результати навчання

За результатами вивчення даного курсу студенти повинні

знати :

- умови повної керованості за фіксований час лінійних керованих систем;
- методи побудови керувань, які розв'язують задачу повної керованості для лінійних систем зі сталими матрицями;
- постановки абстрактної та l -проблеми моментів, скінченної та нескінченної;
- методи розв'язання проблеми моментів у різних просторах.

вміти:

- перевіряти умови повної керованості за фіксований час лінійних керованих систем;
- будувати керування, які розв'язують задачу повної керованості для лінійних систем зі сталими матрицями;
- зводити розв'язання задач керованості до проблеми моментів;
- розв'язувати проблему моментів у різних просторах.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Задачі керованості

Тема 1. Постановка задачі керованості. Програмне та позиційне керування. Приклади. Критерії керованості систем без обмежень на керування та з обмеженнями на керування. Умови повної керованості за фіксований та нефіксований час. Методи побудови керувань, які розв'язують задачу повної керованості для лінійних систем зі сталими матрицями.

Тема 2. Геометричний критерій керованості лінійних систем. Множина нуль керованості системи та її властивості. Критерії локальної нуль керованості автономної лінійної системи. Приклади. Глобальна керованість.

Тема 3. Задача стабілізованості системи.

Тема 4. Метод динамічного програмування. Рівняння Белмана.

Тема 5. Поняття трикутних систем. Відображуваність трикутних та майже трикутних систем на лінійні системи.

Розділ 2. Задача швидкодії та проблема моментів

Тема 6. Початок створення теорії оптимального керування. Життєпис Л. С. Понтрягіна. Постановка задачі оптимального керування. Приклад: керування кутовою швидкістю тіла. Принцип максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії. Теореми про число перемикачів. Приклади: керування рухом точки по прямій та керування рухом маятника. Структура множини керованості.

Тема 7. Теорема Хана-Банаха та наслідки з неї. Загальний вигляд лінійного функціоналу в різних просторах.

Тема 8. Скінченна абстрактна проблема моментів. Нескінченна абстрактна проблема моментів.

Тема 9. Розв'язність \min -проблеми моментів.

Тема 10. Зведення задачі швидкодії до *min*-проблеми моментів.

Тема 11. Побудова раціональних функцій для *min*-проблеми моментів у задачі швидкодії для канонічної системи. Одержання рівняння для часу швидкодії у задачі швидкодії для канонічної системи.

Тема 12. Розв'язання задач швидкодії для канонічної системи 2 та 3 порядків з одного-та двовимірним керуванням із заданими обмеженнями на керування.

Тема 13. Форма Фробеніуса.

Тема 14. Означення та теорема про функцію керованості. Метод побудови функції керованості для лінійних систем.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	Усього	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 1. Задачі керованості						
Тема 1. Постановка задачі керованості. Програмне та позиційне керування. Критерії керованості систем без обмежень на керування та з обмеженнями на керування. Умови повної керованості за фіксований та нефіксований час. Методи побудови керувань, які розв'язують задачу повної керованості для лінійних систем зі сталими матрицями;	26	2	4			20
Тема 2. Геометричний критерій керованості лінійних систем. Множина нуль керованості системи та її властивості. Критерії локальної нуль керованості автономної лінійної системи. Приклади. Глобальна керованість.	7	2				5
Тема 3. Задача стабілізованості системи	4	2	2			
Тема 4. Метод динамічного програмування. Рівняння Белмана.	17	2				15
Тема 5. Поняття трикутних систем. Відображуваність трикутних та майже трикутних систем на лінійні системи.	17	2				15
Разом за розділом 1	71	10	6			55
Розділ 2. Задача швидкодії та проблема моментів						
Тема 6. Початок створення теорії оптимального керування. Життепис Л. С. Понтрягіна. Постановка задачі оптимального керування. Приклад: керування кутовою швидкістю тіла. Принцип максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії. Теореми про	15	4	4			7

число перемикачів. Приклади: керування рухом точки по прямій та керування рухом маятника. Структура множини керуваності.						
Тема 7. Теорема Хана-Банаха та наслідки з неї. Загальний вигляд лінійного функціоналу в різних просторах.	8	4	4			
Тема 8. Скінченна абстрактна проблема моментів. Нескінченна абстрактна проблема моментів.	22	2				20
Тема 9. Розв'язність <i>min</i> -проблеми моментів.	10					10
Тема 10. Зведення задачі швидкодії до <i>min</i> -проблеми моментів.	4	2	2			
Тема 11. Побудова раціональних функцій для <i>min</i> -проблеми моментів у задачі швидкодії для канонічної системи. Одержання рівняння для часу швидкодії у задачі швидкодії для канонічної системи.	12	2				10
Тема 12. Розв'язання задач швидкодії для канонічної системи 2 та 3 порядків з одно- та двовимірним керуванням із заданими обмеженнями на керування.	6	2	4			
Тема 13. Форма Фробеніуса.	6	2	4			
Тема 14. Означення та теорема про функцію керуваності. Метод побудови функції керуваності для лінійних систем.	22	4	4			14
Разом за розділом 2	105	22	22			61
<i>Контрольна робота</i>	4		4			
Усього годин	180	32	32			16

4. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Розв'язання прикладів щодо дослідження систем на повну керуваність.	4
2	Задача стабілізованості системи.	2
3	Принцип максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії. Теорема про число перемикачів. Керування рухом точки по прямій та керування рухом маятника.	4
4	Теорема Хана-Банаха та наслідки з неї. Загальний вигляд лінійного функціоналу в різних просторах.	4
5	Зведення задачі швидкодії до <i>min</i> -проблеми моментів.	2
6	Розв'язання задач швидкодії для канонічної системи 2 та 3 порядків з одно- та двовимірним керуванням із заданими обмеженнями на керування.	4
7	Форма Фробеніуса.	4
8	Означення та теорема про функцію керуваності. Метод побудови функції керуваності для лінійних систем.	4
9	<i>Контрольна робота</i>	4
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Робота з конспектом і літературою і виконання домашніх завдань за темою «Критерії керованості систем зі сталими матрицями».	20
2	Робота з конспектом і літературою за темою «Геометричний критерій керованості лінійних систем».	5
3	Робота з конспектом і літературою за темою «Метод динамічного програмування. Рівняння Белмана.»	15
4	Робота з літературою за темою «Поняття трикутних систем. Відображуваність трикутних систем на лінійні системи.»	15
5	Робота з конспектом і літературою і виконання домашнього завдання за темою «Теореми про число перемикачів»	5
6	Робота з конспектом і літературою і виконання домашнього завдання за темою «Розв'язок задачі керування кутовою швидкістю тіла.»	2
7	Робота з конспектом і літературою за темою «Скінченна абстрактна проблема моментів. Нескінченна абстрактна проблема моментів.»	20
8	Робота з конспектом і літературою за темою «Розв'язність <i>min</i> -проблеми моментів.»	10
9	Робота з конспектом і літературою за темою «Побудова раціональних функцій для <i>min</i> -проблеми моментів для задачі швидкодії для канонічної системи. Одержання рівняння для часу швидкодії для задачі швидкодії для канонічної системи.»	10
10	Робота з конспектом і літературою і виконання домашніх завдань за темою «Методи побудови функції керованості для лінійних систем.»	14
	Разом	116

6. Індивідуальні завдання

Не передбачені робочим планом

7. Методи навчання

Словесні (лекції, пояснення, навчальні дискусії), практичні (розв'язання задач), репродуктивний (розв'язання типових задач), пошуковий (розв'язання нетипових задач), методи узагальнення та конкретизації.

8. Методи контролю

- Перевірка домашніх робіт
- Перевірка контрольної роботи
- Контроль на практичних заняттях
- Контроль на лекціях
- Проведення екзамену

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання					Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Індивідуальне завдання	Разом		
5	10	45	--	60	40	100

Мінімальна кількість балів з навчальної дисципліни, яку здобувач вищої освіти повинен набрати під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання для допуску до складання підсумкового контролю (екзамену), не передбачена програмою.

Критерії оцінювання

Контрольна робота оцінюється у 45 балів. Робота складається з 3 практичних задач. У разі правильної обґрунтованої відповіді студент отримує за завдання бали; якщо у відповіді є помилки, бал не зараховується.

Зміст контрольної роботи:

1. Для заданої керованої лінійної системи другого порядку зі сталими матрицями перевірити критерії повної керованості та знайти керування, яке переводить задану точку в задану та мінімізує інтеграл енергії системи. Розв'язати отриману систему диференціальних рівнянь та перевірити, що задовольняються початкові і кінцеві умови.
2. Розв'язати задачу швидкодії для заданої лінійної системи другого порядку зі сталими матрицями за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Знайти обмежене керування, яке переводить задану точку в задану. Побудувати фазовий портрет.
3. Звести задачу швидкодії до *min*-проблеми моментів і розв'язати її.

Критерії оцінки по першому завданню:

12-15 – для системи перевірені критерії повної керованості, побудовано керування та розв'язана система диференціальних рівнянь, можливі невеликі помилки;

7-11 – керування знайдено, але або не всі критерії повної керованості перевірені, або система диференціальних рівнянь не розв'язана повністю;

0-6 – є помилки у знаходженні керування, критерії повної керованості не перевірені.

Критерії оцінки по другому завданню:

12-15 – задачу швидкодії розв'язано, можливі невеликі помилки

7-11 – помилка у застосуванні принципу максимуму Понтрягіна для заданої системи, ідея вірна, але кінцеве керування знайдено невірно. Фазовий портрет побудовано з помилками.

0-6 – керування знайдено невірно, фазовий портрет не побудовано зовсім.

Критерії оцінки по третьому завданню:

12-15 – задача розв'язана до кінця, можливі невеликі помилки,

7-11 – задача розв'язана наполовину,

0-6 – розв'язано менше половини задачі.

Екзаменаційна робота складається з трьох завдань і передбачає письмову відповідь на два теоретичних питання зі списку, який надається студентам заздалегідь, а також розв'язання практичної задачі.

Кожне теоретичне завдання оцінюється максимально 15 балами, задача – до 10 балів.

По кожному завданню екзаменаційної роботи нараховується:

- максимальний бал у разі правильної обґрунтованої відповіді;
- за незначні помилки оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків;
- за значні логічні помилки оцінка зменшується до 50 відсотків, якщо хід міркувань в цілому правильний;
- якщо відповідь не відповідає жодному з критеріїв – виставляється 0 балів.

Шкала оцінювання (чотирирівнева)

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
90 – 100	відмінно
70 – 89	добре
50 – 69	задовільно
1 – 49	незадовільно

10. Рекомендована література Основна література

1. Теорія керування для інформатиків : підручник / Ю. В. Крак, А. В. Шатирко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 175 с.
2. Bellman R, Kalaba R. Dynamic programming and modern control theory. Vol. 81. New York: Academic Press; 1965.
3. Korobov V I. A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem. Math. Sb. 1980;37(4): 535-557
4. Korobov V. I. Geometric criterion for controllability under arbitrary constraints on the control. Journal of optimization theory and applications, 2007, 134: 161-176.
5. Korobov, V. I., Lutsenko A. V. Controllability of a linear stationary system onto a subspace for an unfixed time. Ukrainian Mathematical Journal, 1977, 2: 406-408.
6. Korobov V. I., Pavlichkov S. S. Global properties of the triangular systems in the singular case. Journal of mathematical analysis and applications, 2008, 342.2: 1426-1439.
7. Korobov V I, Sklyar G M. Time optimality and the power moment problem, Math. Sb. 1989; 62(1): 185-206
8. Korobov V I, Sklyar G M. Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle. Dif. Equ. 1990; 26(11): 1422-1431
9. Lin, Feng. Robust control design: an optimal control approach. John Wiley & Sons, 2007.
10. Pontryagin L S, Boltyanskii V G, Gamkrelidze R V, Mishchenko E. The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, New York. 1962
11. Zabczyk, Jerzy. Mathematical control theory. Springer International Publishing, 2020.

Допоміжна література

1. Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. SIAM J. Control Optim. 2000; 38(3): 751-766
2. Korobov V I. Time Optimality for Systems with Multidimensional Control and Vector Moment Min-Problem. J. Dyn. Control Syst. 2020; 26: 525–550
3. Korobov V I, Bugaevskaya A N. The solution of time-optimal problem on the basis of the Markov moment min-problem with even gaps, JMAG, 2003, 10(4): 505-523
4. Korobov V I, Bugaevskaya A N. Almost Power Sum Systems, Mathematics of Computation, 2016, 85(298): 717–736.
5. Korobov V I, Skoryk V O, Construction of restricted controls for a non-equilibrium point in global sense. Vietnam J. Math. 2015; 43(2): 459-469
6. Ovseevich A, Ananievski I. Robust feedback control for a linear chain of oscillators. J. Optim. Theory Appl, 2021, 188: 307-316.
7. Son, Nguyen Khoa. Global controllability of linear autonomous systems: A geometric consideration. Systems & Control Letters, 1985, 6.3: 207-212.