

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н.
Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

В.о. декана факультету математики
і інформатики

Євген МЕНЯЙЛОВ



Сергій 2025 р.

Робоча програма навчальної дисципліни
ТЕОРІЯ ОПЕРАТОРІВ

рівень вищої освіти **перший(бакалаврський)**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2025 / 2026 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

26 серпня 2025 року, протокол № 10

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:

Щербина Олексій Сергійович, канд. фіз-мат. наук, старший викладач кафедри фундаментальної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики від 26 серпня 2025 року, протокол № 1.

В. о. завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)

програми



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики від 26 серпня 2025 року, протокол № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни **«ТЕОРІЯ ОПЕРАТОРІВ»** складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр спеціальності 111 – Математика** освітня програма **«Математика»**

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є ознайомлення майбутніх бакалаврів зі спектральною теорією обмежених операторів в Гільбертовому просторі

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є опанування майбутніми бакалаврами основними методами дослідження обмежених операторів, включаючи дослідження спектру теорему для обмежених самоспряжених операторів та теорію Фредгольма для компактних операторів.

1.3. Кількість кредитів – 4

1.4. Загальна кількість годин – 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
6-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	

1.6. Перелік компетентностей, що формує дана дисципліна:

ІК-01 Здатність розв'язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп'ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК-01 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК-03 Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК-07 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

ФК-01 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК-02 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.

ФК-03 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.

1.7. Перелік результатів навчання, що формує дана дисципліна:

РН06. Знати методи математичного моделювання природничих та/або соціальних процесів.

РН09. Уміти працювати зі спеціальною літературою іноземною мовою.

РН10. Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Основні властивості простору Гільберта.

□ **Тема 1.** Базові відомості про простір Гільберта.

Приклади лінійних просторів. Скалярний добуток векторів та відповідна топологія у просторі. Повні та неповні простори. Нерівність Коши. Ортонормований базис у гільбертовому просторі. Сепарабельні та несепарабельні простори. Приклади. Ізоморфність сепарабельних просторів.

□ **Тема 2.** Розкладання по ортогональному базису.

Ряди Фур'є. Єдиність розкладання у ряд Фур'є. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля. Метод Грамма-Шмідта ортогоналізації системи незалежних векторів.

□ **Тема 3.** Геометрія гільбертового простору

Відстань від точки до опуклої замкнутої множини. Ортогональне доповнення замкнутого підпростору. Розкладання простору в ортогональну суму.

□ **Тема 4.** Лінійні функціонали в гільбертовому просторі. Поняття про лінійний функціонал. Теорема Ріса та загальний вигляд лінійного неперервного функціоналу.

□ **Тема 5.** Білінійні функціонали та квадратичні форми.

Властивості білінійного обмеженого функціоналу. Загальний вигляд білінійного обмеженого функціоналу. Квадратичні форми та їх зв'язок з білінійними обмеженого функціоналами. Позитивні квадратичні форми. Нерівності для самоспряжених операторів.

Розділ 2. Компактні оператори у гільбертовому просторі.

- **Тема 6. Поняття компактного оператора**
Означення компактного оператора та його основні властивості. Збіжність послідовностей компактних операторів.
- **Тема 7. Резольвента оператора та його спектр.**
Означення резольвенти та її основні властивості. Резольвентна множина оператора та його спектр.
- **Тема 8. Теорія Фредгольму компактних операторів.**
Доведення теорем Фредгольму для компактних операторів. Спектральне розкладання для самоспряжених компактних операторів.
- Тема 9. Застосування теорем Фредгольму в теорії інтегральних рівнянь.**
Інтегральні рівняння першого та другого роду. Рівняння Вальтерра. Ознаки компактності інтегральних операторів з необмеженими ядрами.
Теорема єдиності.

Розділ 3. Спектральна теорема для обмежених самоспряжених та унітарних операторів.

- **Тема 10. Побудова функцій від самоспряжених обмежених операторів.**
Монотонні послідовності операторів та їх збіжність. Побудова функцій, що є границями монотонно спадних послідовностей поліномів.
- **Тема 11. Спектральне розкладання для самоспряжених.**
Побудова спектральних проекторів. Спектральна міра та її властивості. Спектральне зображення самоспряженого оператора
- **Тема 12. Спектральна теорія унітарних операторів.**
Функції від унітарних операторів. Спектральні проектори та спектральне зображення унітарного оператора

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	Денна форма навчання					
	Усього	у тому числі				
		Л	п	лаб	інд	ср
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 1. Основні властивості простору Гільберта.						
Тема 1. Базові відомості про простір Гільберта.	8	2	2			4
Тема 2. Розкладання по ортогональному базису.	8	2	2			4
Тема 3. Геометрія гільбертового простору	8	2	2			4

Тема 6. Поняття компактного оператора	9	2	2			5
Тема 7. Резольвента оператору та його спектр	9	2	2			5
Тема 8. Теорія Фредгольму компактних операторів.	9	2	2			5
Тема 9. Застосування теорем Фредгольму в теорії інтегральних рівнянь.	13	4	4			5
Разом за розділом 2	40	10	10			20
Розділ 3. Спектральна теорема для обмежених самоспряжених та унітарних операторів.						
Тема 10. Побудова функцій від самоспряжених обмежених операторів.	14	4	4			6
Тема 11. Спектральне розкладання самоспряжених операторів	16	6	6			4
Тема 12. Спектральна теорія унітарних операторів.	8	2	2			4
Разом за розділом 3	38	12	12			14
Контрольна робота	2					2
Усього годин	120	32	32			56

4. Теми практичних занять

№ з / п	Назва теми	Кількість годин
1	Головні властивості гільбертового простору.	10
2	Компактні оператори та їх застосування в інтегральних рівняннях.	10
3	Спектральне розкладання обмежених самоспряжених та компактних операторів.	10
4	Контрольна робота.	2
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з / п	Види , зміст самостійної роботи	Кіл ь- кіст ь год ин
	Опрацювання додаткового матеріалу за відповідними темами:	
61	Полнота класичних функціональних просторів	2
2	Розкладання в ряди Фур'є в функціональних просторах та використання нерівності Бесселя та рівності Парсеваля в задачах	4
3	Розкладання простору в ортогональну суму підпросторів та використання загального вигляду лінійних та білінійних функціоналах	10
4	Компактні оператори. Оператори Гільберта-Шмідта. Доведення компактності різноманітних операторів	6
5	Резольвента та спектр оператора. Використання нерівностей для резольвенти	6
6	Теореми Фредгольма та їх застосування для рішення інтегральних рівнянь. Оператор Вальтерра та його спектр	10
7	Побудова функцій від оператора. Розкладання одиниці та типи спектру	10
8	Спектральна теорема для унітарних операторів. Перетворення Келі.	10
	Разом	56

6.

Індивідуальні завдання
Не передбачені планом

7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину та в період воєнного стану, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

8. Методи контролю

Навчання здійснюється у формі лекцій, практичних занять, а також у формі самостійної роботи (опрацювання навчального матеріалу, розв'язання учбових задач); контрольна робота, семестровий підсумковий залік.

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль та самостійна робота												Залік	Сума		
Розділ 1					Розділ 2				Розділ 3					Контрольна робота	Разом
Т 1	Т 2	Т 3	Т 4	Т 5	Т 6	Т 7	Т 8	Т 9	Т 10	Т 11	Т 12				
3	5	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	20	60	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.

1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки
------	--------------	--

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	зараховано
70-89	
50-69	
1-49	не зараховано

10.Рекомендована література

Основна література

1. М. Reed, B. Simon Methods of Modern Mathematical Physics (V1) / Academic Press (January 11, 1980)

Допоміжна література

1. Eidelman, Yu., Milman, V.,Tsolomitis, A. Functional Analysis. Introduction.- American mathematical society, Providence, 2017.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

Wolfram Math World: <http://mathworld.wolfram.com/OperatorTheory.html>