

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Проректор з науково-  
педагогічної роботи

Олександр ГОЛОВКО

\_\_\_\_\_

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**Топологічні векторні простори**

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Старший викладач кафедри фундаментальної математики, доктор філософії в галузі математики, Заварзіна Олеся Олегівна**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики

Протокол від 26 серпня 2022 року № 1.

Завідувач кафедри



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної) програми



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол № 1 від 29 серпня 2022 року.

Голова науково-методичної комісії

Ольга АНОЩЕНКО

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Топологічні векторні простори” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр** спеціальності **111- Математика** освітня програма «Математика»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Топологічні векторні простори” є надання майбутнім фахівцям додаткових знань у галузі сучасного функціонального аналізу.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни “Топологічні векторні простори” є додаткове навчання студентів теоретичним основам і методам сучасного функціонального аналізу та зв'язку цієї теорії з іншими математичними дисциплінами.

1.3. Кількість кредитів – 4

1.4. Загальна кількість годин – 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
4-й	
Семестр	
7-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
год. 56	
Індивідуальні завдання	
	год.

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен **знати** :

- Аксиоматику топологічних векторних просторів, приклади, властивості околів нуля, критерій метризованості.
- Термінологію: підпростори, факторпростори, оператори, функціонали, опуклі множини, півнорми, локально опуклі простори.
- Теорему Гана-Банаха у різних формах та її класичні застосування.
- Інтерполяційну теорему Ейдельгейта.
- Принцип одностайної неперервності.
- Основи теорії дуальності: слабкі топології, критерії слабкої збіжності, теорему про біполярну, теорему Алаоглу, теорему Еберлейна - Шмульяна.

**уміти** :

- Застосовувати вивчену теорію до розв'язку задач.
- Застосовувати мову топологічних векторних просторів у задачах математичного аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь.
- Користуватися компактністю у нескінченновимірних просторах.

## **2. Тематичний план навчальної дисципліни**

### **Розділ 1. Аксиоматика та загальні властивості топологічних векторних просторів**

#### **Тема 1. Топологічні простори та фільтри.**

1. Термінологія загальної топології (повторення).
2. Фільтри, бази фільтрів та ультрафільтри. Границі та граничні точки за фільтрами.
3. Критерії компактності у термінах фільтрів.
4. Добуток топологічних просторів. Теорема Тихонова про добуток компактів.

#### **Тема 2. Вступ до топологічних векторних просторів.**

1. Означення та властивості околів нуля.
2. Приклади.
3. Відокремлюваність.

#### **Тема 3. Метризовність та нормовність.**

1. Обмежені множини – означення та властивості.
2. Критерій нормовності.
3. Критерій метризовності.

#### **Тема 4. Неперервні функціонали та оператори.**

1. Зв'язок між неперервністю та обмеженістю лінійних операторів.
2. Критерії неперервності лінійних функціоналів.
3. Фільтри Коші та повнота.
4. Теорема про ізоморфізм  $n$ -вимірних просторів.

#### **Тема 5. Локально опуклі простори.**

1. Локальна опуклість та півнорми.
2. Приклади.
3. Теорема Гана - Банаха.
4. Інтерполяційна теорема Ейдельгайта.

### **Розділ 2. Теорія двоїстості для локально опуклих просторів**

#### **Тема 6. Дуальність.**

1. Пари просторів у двоїстості. Приклади.
2. Слабкі топології. Неперервність функціоналів у слабкій топології.
3. Замкненість та слабка замкненість.
4. Поляри, теорема про біполяр.

#### **Тема 7. Принцип одностайної неперервності.**

1. Бочки, бочечність та теорема Бера.
2. Доведення принципу одностайної неперервності.

#### **Тема 8. Теорема Алаоглу.**

1. Формулювання та доведення теореми Алаоглу.
2. Обмеженість та слабка обмеженість множин у локально опуклих просторах.

#### **Тема 9. Дуальність у банахових просторах.**

1. Метризовність слабкої топології на підмножинах.
2. Вкладення простору у бідуальний простір.
3. Теорема Еберлейна-Шмульяна.

### Тема 10. Рефлексивність у банахових просторах.

1. Теорема Голдстайна.
2. Критерії рефлексивності.
3. Властивості рефлексивних просторів.
4. Приклади рефлексивних та нерефлексивних просторів.

### 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усьог	у тому числі					усьог	у тому числі				
		о	л	п	лаб.	інд.		с. р.	о	л	п	лаб.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Аксиоматика та загальні властивості топологічних векторних просторів</b>												
Тема 1. Топологічні простори та фільтри	17	4	4			9						
Тема 2. Вступ до топологічних векторних просторів.	15	4	2			9						
Тема 3. Метризованість та нормованість.	14	2	4			8						
Тема 4. Неперервні функціонали та оператори.	15	2	4			9						
Тема 5. Локально опуклі простори.	14	4	2			8						
Разом за розділом 1	75	16	16			43						
<b>Розділ 2. Теорія двоїстості для локально опуклих просторів</b>												
Тема 6. Дуальність.	17	4	4			9						
Тема 7. Принцип одностайної неперервності.	15	2	4			9						
Тема 8. Теорема Алаоглу.	14	4	2			8						
Тема 9. Дуальність у банахових просторах.	15	4	2			9						
Тема 10. Рефлексивність у банахових просторах.	14	2	4			8						
Разом за розділом 2	75	16	16			43						

	<b>150</b>	<b>3</b>	<b>3</b>			<b>86</b>						
		<b>2</b>	<b>2</b>									

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Топологічні простори та фільтри	4
2	Опуклі, врівноважені та поглинаючі множини. Функціонал Мінковського	2
3	Метризовність та нормовність	4
4	Неперервні функціонали та оператори	4
5	Контрольна робота	2
6	Дуальність	4
7	Бочки, теорема Бера та принцип одностайної неперервності	4
8	Теорема Алаоглу та слабо із зірочкою збіжні послідовності	2
9	Слабо збіжні послідовності.	2
10	Бідуальний простір.	2
11	Рефлексивні та нерефлексивні простори	2
12	Оглядове заняття з розв'язку задач підвищеної складності	2
	Разом	<b>32</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Топологічні простори та фільтри	9
2	Вступ до топологічних векторних просторів	9
3	Метризовність та нормовність	8
4	Неперервні функціонали та оператори	9
5	Локально опуклі простори	8
6	Дуальність	9
7	Принцип одностайної неперервності	9
8	Теорема Алаоглу	8
9	Дуальність у банахових просторах	9
10	Рефлексивність у банахових просторах	8
	Разом	<b>86</b>

#### 6. Індивідуальні завдання

не передбачені навчальним планом

## 7. Методи контролю

- 1) поточний семестровий (домашні завдання); контрольна робота (1);
- 2) письмовий екзамен.

## 8. Схема нарахування балів

Поточний контроль та самостійна робота		Контрольна робота, передбачена робочим планом	Разом	Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	20	60	40	100
20	20				

## Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

## Критерії оцінювання

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі

		навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 –69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

## 9. Рекомендована література

### Основна література

1. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”)

### Допоміжна література

2. Walter Rudin. Functional Analysis. /McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 2 edition (Jan. 1 1991)
3. Robertson A, Robertson D , Topological vector spaces/ Cambridge University Press; 2nd ed. edition (March 8 1973)