

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Кафедра **фундаментальної математики**

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор з науково-
педагогічної роботи

Антон ПАНТЕЛЕЙМОНОВ

“ ____ ” _____ 2020 р.

Робоча програма навчальної дисципліни
Простори Соболева та теорія необмежених операторів

рівень вищої освіти **бакалавр**
галузь знань **11 – Математика та статистика**
напрямок підготовки **111 – Математика**
освітня програма **«Математика»**
вид дисципліни **за вибором**
факультет **математики і інформатики**

2020 / 2021 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

31 серпня 2020 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Фастовська Тамара Борисівна, к. ф.-м. н.,
доцент кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол № 1 від 31 серпня 2020 року.

Завідувач кафедри

Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика».

Гарант освітньої (професійної)
програми

Ганна ВИШНЯКОВА

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і
інформатики
протокол № 1 від 31 серпня 2020 року.

Голова науково-методичної комісії

Ольга АНОЩЕНКО

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни **«Простори Соболева та теорія необмежених операторів»** складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр спеціальності 111 – Математика** освітня програма **«Математика»**

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета курсу полягає у навчанні майбутніх спеціалістів основам теорії операторів та просторів Соболева.

1.2. Завдання курсу полягає у набутті навичок застосування теорії операторів та просторів Соболева до рівнянь математичної фізики.

1.3. Кількість кредитів – 5

1.4. Загальна кількість годин **150**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
4-й	
Семестр	
8-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
86 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання:

знати:

- основні властивості функціонального числення самоспряжених операторів та спектральну теорему, властивості збурених операторів.
- означення та властивості основних видів просторів Соболева.

уміти:

- використовувати теорію операторів та просторів Соболева у теорії рівнянь математичної фізики.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Теорія операторів.

Тема 1. Замкнені необмежені оператори.

Критерій замкненості. Замкнені розширення.

Тема 2. Спряжений оператор.

Означення та властивості спряжених операторів. Самоспряжені необмежені оператори.

Тема 3. Симетричні оператори.

Критерій обмеженості оператора. Власні значення симетричних операторів. Оператори диференціювання та множення на незалежну змінну. Розширення за Фрідріхсом.

Тема 4. Спектр оператора.

Резольвента та спектр. Класифікація спектру. Спектр самоспряжених операторів. Спектр операторів диференціювання та множення на незалежну змінну. Метод графіка. Спектральний аналіз компактних операторів. Оператори з дискретним спектром.

Розділ 2. Простори Соболева.

Тема 1. Простори Соболева цілих порядків в обмеженій області.

Простори Соболева $H^k(\Omega)$ та їх властивості. Слід функції з $H^k(\Omega)$. Теорема про слід. Простори Соболева $H_0^k(\Omega)$ та їх властивості. Теорема Реліха. Теорема про компактність множини слідів функцій з $H^1(\Omega)$. Еквівалентні норми у просторах Соболева $H^k(\Omega)$ та $H_0^k(\Omega)$.

Тема 2. Простори Соболева у всьому просторі.

Простори Соболева $H^s(\mathbb{R}^m)$. Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ у $H^s(\mathbb{R}^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболева $H^s(\mathbb{R}^m)$. Теорема вкладення для $H^s(\mathbb{R}^m)$. Теорема про слід для $H^s(\mathbb{R}^m)$. Оператори підняття у весь простір $\mathbb{R}^m$.

Тема 3. Простори Соболева у напівпросторі.

Простори Соболева $H_0^s(\mathbb{R}_+^m)$. Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^m)$ у $H_0^s(\mathbb{R}_+^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболева $H_0^s(\mathbb{R}_+^m)$. Простори Соболева $H^s(\mathbb{R}_+^m)$ та їх властивості. Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^m)$ у $H^s(\mathbb{R}_+^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболева $H^s(\mathbb{R}_+^m)$. Спряжені простори до $H^s(\mathbb{R}_+^m)$.

Тема 4. Простори Соболева з нецілими порядками у обмеженій області.

Простори $H^s(\Omega)$ та $H_0^s(\Omega)$. Еквівалентні норми у просторах Соболева $H^s(\Omega)$. Простори $H^s(\Gamma)$. Теорема про слід для функцій з $H^s(\Omega)$. Теорема про підняття у область. Теорема про продовження з області у весь простір $\mathbb{R}^m$. Регулярність функцій з $H^s(\Omega)$.

Тема 5. Інтерполяція просторів Соболева.

Загальна теорія інтерполяції. Інтерполяція просторів $H^s(\Omega)$. Інтерполяція просторів $H_0^s(\Omega)$. Інтерполяція зі спряженими просторами.

Розділ 3. Вступ до теорії напівгруп та застосування до диференціальних рівнянь.

Тема 1. Сильно неперервні напівгрупи лінійних операторів.

Генератори напівгруп. Терми Хіллі-Іосіди та Люмера-Філіпса.

властивості. Слід функції з $H^k(\Omega)$. Теорема про слід. Простори Соболева $H_0^k(\Omega)$ та їх властивості. Теорема Реліха. Теорема про компактність множини слідів функцій з $H^1(\Omega)$. Еквівалентні норми у просторах Соболева $H^k(\Omega)$ та $H_0^k(\Omega)$											
Тема 2. Простори Соболева у всьому просторі. Простори Соболева $H^s(\mathbb{R}^m)$. Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ у $H^s(\mathbb{R}^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболева $H^s(\mathbb{R}^m)$. Теорема вкладення для $H^s(\mathbb{R}^m)$. Теорема про слід для $H^s(\mathbb{R}^m)$. Оператори підняття у весь простір $\mathbb{R}^m$.	15	4	4			7					
Тема 3. Простори Соболева у напівпросторі. Простори Соболева $H_0^s(\mathbb{R}_+^m)$. Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^m)$ у $H_0^s(\mathbb{R}_+^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболева $H_0^s(\mathbb{R}_+^m)$. Простори Соболева $H^s(\mathbb{R}_+^m)$ та їх властивості. Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^m)$ у $H^s(\mathbb{R}_+^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболева $H^s(\mathbb{R}_+^m)$. Спряжені простори до $H^s(\mathbb{R}_+^m)$.	15	4	4			7					
Тема 4. Простори Соболева з нецілими порядками у обмеженій області. Простори $H^s(\Omega)$ та $H_0^s(\Omega)$. Еквівалентні норми у просторах Соболева $H^s(\Omega)$. Простори $H^s(\Gamma)$. Теорема про слід для функцій з $H^s(\Omega)$. Теорема про підняття у область. Теорема про продовження з області у весь простір $\mathbb{R}^m$. Регулярність функцій	11	2	2			7					

з $H^s(\Omega)$.												
Тема 5. Інтерполяція просторів Соболева. Загальна теорія інтерполяції. Інтерполяція просторів $H^s(\Omega)$. Інтерполяція просторів $H_0^s(\Omega)$ Інтерполяція зі спряженими просторами.	13	4	2			7						
Разом за розділом 2	65	16	14			35						
Розділ 3. Вступ до теорії напівгруп та застосування до диференціальних рівнянь.												
Тема 1. Сильно неперервні напівгрупи лінійних операторів. Генератори напівгруп. Теореми Хілле-Іосіди та Люмера-Філіпса.	12	2	2			8						
Тема 2. Абстрактна задача Коші. Теореми про коректну розв'язність задачі Коші.	12	2	2			8						
Тема 3. Коректна розв'язність лінійних диференціальних рівнянь. Застосування операторного методу та методу апроксимацій до доведення коректної розв'язності.	17	2	4			11						
Разом за розділом 3	41	6	8			27						
Усього годин	150	32	32			86						

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

1	Замкнені необмежені оператори.	2
2	Спряжений оператор.	2
3	Симетричні оператори.	2
4	Спектр оператора.	4
5	Простори Соболева цілих порядків в обмеженій області.	2
6	Простори Соболева у всьому просторі.	4
7	Простори Соболева у напівпросторі.	4
8	Простори Соболева з нецілими порядками у обмеженій області.	2
9	Інтерполяція просторів Соболева.	2
10	Сильно неперервні напівгрупи лінійних операторів	2
11	Абстрактна задача Коші	2
12	Коректна розв'язність лінійних диференціальних рівнянь.	2
13	Контрольна робота.	2
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання додаткового матеріалу за зазначеними темами, виконання домашніх завдань:	
1	Замкнені необмежені оператори. Критерій замкненості. Замкнені розширення. (Домашнє завдання)	6
2	Спряжений оператор. Означення та властивості спряжених операторів. Самоспряжені необмежені оператори.	6
3	Симетричні оператори. Критерій обмеженості оператора. Власні значення симетричних операторів. Розширення за Фрідріхсом.	6
4	Резольвента та спектр. Класифікація спектру. Спектр самоспряжених операторів. Метод графіка. Спектральний аналіз компактних операторів. Оператори з дискретним спектром.	6
5	Простори Соболева $H^k(\Omega)$ та їх властивості. Теорема про слід. Простори Соболева $H_0^k(\Omega)$ та їх властивості. Теорема Реліха. Еквівалентні норми у просторах Соболева (Домашнє завдання)	7
6	Простори Соболева у всьому просторі. (Домашнє завдання)	7
7	Простори Соболева у напівпросторі. (Домашнє завдання)	7
8	Простори Соболева з нецілими порядками у обмеженій області.	7
9	Інтерполяція просторів Соболева. (Домашнє завдання)	7
10	Сильно неперервні напівгрупи лінійних операторів. Генератори напівгруп. Терми Хіллі-Іосіди та Люмера-Філіпса. (Домашнє завдання)	8
11	Абстрактна задача Коші. (Домашнє завдання) Теорема про коректну розв'язність задачі Коші.	8
12	Коректна розв'язність лінійних диференціальних рівнянь. Застосування операторного методу та методу апроксимацій до доведення коректної розв'язності.	7
17	Підготовка до іспиту	4
	Разом	86

6. Індивідуальні завдання

Не передбачені планом

7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

8. Методи контролю

- контрольна робота.
- залік (за вибором студента).

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання													Сума		
Розділ 1				Розділ 2					Розділ 3			Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Ра- зо м	Залік	100
Т 1	Т 2	Т 3	Т 4	Т 1	Т 2	Т 3	Т 4	Т 5	Т 1	Т 2	Т 3	20	60	40	
3	5	3	3	3	3	3	3	5	3	3	3				

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки.

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

10. Рекомендована література

Базова

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве,- М.: Наука, Физматлит, 1966.
2. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г., Функциональный анализ. Курс лекций. - К.: Вища школа, 1990.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Нелинейные граничные задачи и их приложения, - М. : Мир, 1971.
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных, - М.: Наука, 1983.
5. A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to PDE's, - Springer, New York, 1986

Допоміжна

1. Владимиров В. С. , Уравнения математической физики : Учебник для вузов : 5-е изд.,доп.. - М. : Наука, 1988 .
2. Рид М, Саймон Б., Методы современной математической физики. Т.1. – М.: Мир, 1977.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. www-library.univer.kharkov.ua
2. <http://library.kpi.kharkov.ua>