

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник голови приймальної комісії, проректор з науково-педагогічної роботи
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

_____ Олександр ГОЛОВКО
«_____» _____ 2025 р.

ПРОГРАМА

**вступного іспиту зі спеціальності
для вступників на навчання
на здобуття ступеня доктора філософії
за спеціальністю Е7 «Математика»**

Цикл питань з фундаментальної підготовки.

Лінійна алгебра

1. Системи лінійних рівнянь. Теореми Крамера і Кронекера-Капеллі. Метод Гауса розв'язання систем лінійних рівнянь.
2. Лінійні простори: лінійна комбінація, лінійна оболонка, лінійна незалежність, базис, розмірність.
3. Лінійні оператори в скінченновимірних просторах. Зв'язок між розмірністю ядра та розмірністю образу. Матриця оператора, власні значення та власні вектори.
4. Аксіоми скалярного добутку. Евклідовий простір. Самоспряжені оператори в скінченновимірних просторах та їх квадратичні форми. Зведення до діагонального вигляду.

Математичний аналіз

1. Часткові похідні та диференціал функції кількох змінних. Екстремум і умовний екстремум. Формула Тейлора. Неявні відображення.
2. Інтеграл Рімана функції дійсної змінної, формула Ньютона-Лейбніца. Кратний інтеграл, зведення до повторного.
3. Невласні інтеграли, абсолютна та умовна збіжності.
4. Числові та функціональні ряди. Абсолютна, умовна та рівномірна збіжності. Властивості сум функціональних рядів.
5. Зв'язки між подвійними і криволінійним, поверхневим і криволінійним, потрійним і поверхневим інтегралами. Формули Гріна, Гауса-Остроградського та Стокса.
6. Ряд Фур'є. Властивості. Питання збіжності

Геометрія

1. Тензори і тензорні поля, коваріантне диференціювання тензорів
2. Ріманова метрика. Ріманова зв'язність. Тензор кривини ріманової метрики. Секційна кривина
3. Перша та друга фундаментальні форми гіперповерхні та їх коваріантні похідні. Рівняння Гауса і Кодацці для гіперповерхні.
4. Поверхні і метрики сталої гаусової кривини, мінімальні поверхні. Теорема Гільберта. Теорема Бернштейна.
5. Екстремалі варіаційної задачі для функціоналу дії. Рівняння Ейлера-Лагранжа. Екстремалі функціоналів енергії та довжини кривої. Геодезичні лінії, їх рівняння і властивості.

Топологія

1. Аксиоми топології. Відкриті і замкнені підмножини. Неперервні відображення топологічних просторів. Гомеоморфізм. Топологічний інваріант.
2. Аксиоми зліченності. Сепарабельність. Теорема Ліндельофа (про зліченне підпориття). Приклади сепарабельних та несепарабельних просторів.
3. Аксиоми відокремлюваності. Аксиома Гаусдорфа. Збіжність послідовності в топологічному просторі.
4. Компактні топологічні простори. Теорема Веєрштраса. Компактні підмножини $\mathbb{R}^n$.
5. Метричний простір і його топологія. Послідовності, що збігаються, і фундаментальні. Повнота. Принцип стискаючих відображень. Компактність в метричному просторі.
6. Зв'язні та лінійно зв'язні топологічні простори. Теорема про проміжне значення неперервної функції. Теорема Брауера про нерухому точку: доведення в одновимірному випадку.

Звичайні диференціальні рівняння

1. Інтегрування деяких класів диференціальних рівнянь першого порядку (з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні, в повних диференціалах).
2. Теореми існування, єдиності, продовжуваності розв'язків задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. Неперервна та диференційовна залежність від параметрів та початкових даних.
3. Лінійні диференціальні рівняння та системи лінійних диференціальних рівнянь: властивості розв'язків. Знаходження розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
4. Стійкість за Ляпуновим розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь. Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Метод функцій Ляпунова.

Цикл питань з професійної та практичної підготовки.

Комплексний аналіз

1. Елементарні функції комплексного змінного і здійснювані ними конформні відображення.
2. Теорема про інтеграл уздовж замкнутого контуру. Інтегральна формула Коші.
3. Розклад голоморфної функції в степеневий ряд. Нерівність Коши для коефіцієнтів. Теорема Ліувілля.
4. Принцип максимуму модуля для аналітичних функцій.
5. Розкладання аналітичних функцій в ряд Лорана. Класифікація ізольованих особливих точок.
6. Теорія вираховувань. Приклади застосування до обчислення інтегралів.
7. Принцип аргументу і теорема Руше.

Функціональний аналіз.

1. Гільбертів простір. Ортонормовані системи та ряди Фур'є. Нерівність Бесселя та рівність Парсеваля.
2. Теорема про існування ортонормованого базису в сепарабельному гільбертовому просторі.
3. Банахів простір. Умова неперервності лінійного оператора. Норма оператора. Спряжений простір.
4. Теорема Гана – Банаха про продовження функціоналів та теорема Гана – Банаха про відокремлення опуклих множин.

Диференційні рівняння з частинними похідними

1. Крайові задачі для рівняння Лапласа. Функція Гріна задачі Діріхле.
2. Узагальнена (слабка) похідна та простори Соболева
3. Задача Коші для одновимірного рівняння теплопровідності.
4. Хвильове рівняння в обмеженій області. Початково-крайова задача. Власні коливання та власні частоти. Розв'язання методом власних функцій.

Література:

Лінійна алгебра:

1. Булдигін В. В. та ін., Лінійна алгебра та аналітична геометрія . К: ТВіМС, 2011.
2. A. Kurosh, Higher Algebra, Mir publishers, 1980.
3. Gelfand I.M., Lectures on Linear Algebra. – Dover, N.Y, 1989.
4. A. Kostrikin, Yu. Manin., Linear Algebra and Geometry, Gordon and Breach Publishers.

Математичний аналіз:

1. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. - К. : «Либідь», 1993.
2. Zorich V., Mathematical analysis. Springer, 2008.
3. Rudin W. Principals of mathematical analysis, International series in pure and applied mathematics, 1976

Комплексний аналіз:

1. Самойленко В.Г. и др. Комплексний аналіз, приклади і задачі. Київський університет, 2010.
2. Shabat B.V. Introduction to complex analysis, Part.1,2. AMS Publishers, 2019.
3. Vladimiroff V. Methods of the theory of function of several complex variable. MIT Press, 2020

Функціональний аналіз:

1. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”).

Геометрія:

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Основа, 1995.
2. B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, Modern Geometry — Methods and Applications, Graduate Texts in Mathematics book series (GTM, volume 93)
3. Aminov Yu., Differential geometry and topology of curves, CRC Press, 2003
4. Aminov Yu. The Geometry of Submanifolds, CRC press, 2001.
5. Petersen P. Riemannian Geometry. Springer, 1997.
6. Jost J. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Springer, 2011

Топологія:

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Основа, 1995.
2. Armstrong M.M., Basic Topology. Springer, 2010
3. Hatcher A. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2003
4. Kosniowski C. A first course of algebraic topology. Cambridge University Press, 2010
5. Morris S. Topology without tears. University of New England, 1989

Звичайні диференціальні рівняння.

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник. Київ, «Либідь», 2003
2. Збірник задач підвищеної складності з курсу "Диференціальні рівняння" / О.В.Капустян [та ін.] ; за ред. М. О. Перестюка. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 79 с.
3. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М., Диференціальні та інтегральні рівняння. –К.: «Либідь», 2004
4. Arnold V., Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, 1992

Диференціальні рівняння з частинними похідними:

1. Arnold V., Lectures on Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1997
2. Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1983;(Part I).
3. Evans L.C. Partial Differential Equations, Providence: AMS, 1998.

Зразок білету:

Екзаменаційний білет №	
1. Питання з циклу фундаментальної підготовки 2. Питання з циклу фундаментальної підготовки 3. Питання з циклу професійної та практичної підготовки	
Голова предметної комісії	Підпис
Білети затверджено на засіданні науково-методичної Ради факультету математики і інформатики від « 10.02_» 2025 року, протокол № 7_	

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ ВСТУПНИКІВ

Вступний іспит зі спеціальності проводиться у письмовій формі. Кожний білет складається з трьох теоретичних питань з наведеного вище переліку. Формулювання питання може бути конкретизоване. Відповідь на кожне питання білету оцінюється у 200 балів.

Критерії оцінювання відповіді на кожне питання білету.

Оцінка в балах	Пояснення
180 – 200	Вступник демонструє глибоке розуміння і вільне володіння теоретичним матеріалом, обізнаність з літературою, може навести приклади і пояснити зміст понять і результатів, викладення є грамотним, логічним і вичерпним.
140 – 179	Вступник демонструє розуміння значної частини теоретичного матеріалу, може навести приклади і пояснити зміст понять і результатів, викладення є грамотним і логічним, з незначними неточностями.
100 – 139	Вступник в цілому орієнтується в теоретичному матеріалі, може навести приклади і пояснити зміст частини понять і результатів, викладення є неповним, містить неточності.
50 – 99	Вступник погано орієнтується у значній частині теоретичного матеріалу, не може пояснити зміст основних понять і результатів, викладення містить численні неточності.

0–49	Вступник не орієнтується у значній частині теоретичного матеріалу, допускає суттєві помилки, не може пояснити зміст понять і результатів.
------	---

Загальна оцінка обраховується як середнє арифметичне оцінок за трьома завданнями з округленням до цілого числа у бік збільшення. Вступник може брати участь у конкурсному відборі, якщо його загальна оцінка складає не менше 100 балів.

Голова предметної комісії

Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Протокол засідання приймальної комісії № 2 від 20 березня 2025 року

Відповідальний секретар приймальної комісії

Ганна ЗУБЕНКО