

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Проректор з науково-  
педагогічної роботи

Олександр ГОЛОВКО

---

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

**Аналітична геометрія**

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 - Математика та статистика, 01 – Освіта/Педагогіка**

спеціальність **111 – Математика, 113- Прикладна математика,  
014.04 – Середня освіта (Математика)**

освітня програма **«Математика», «Прикладна математика»,  
«Математика та інформатика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Ямпольський Олександр Леонідович, докт. фіз.-мат. наук, доцент,  
завідувач кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
протокол № 1 від 26 серпня 2022 року.

Завідувач кафедри



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Прикладна  
математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми

Світлана ІГНАТОВИЧ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика та  
Інформатика»

Гарант освітньої (професійної)



програми

Ганна ЧЕРНОВА

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і  
інформатики  
протокол № 1 від 29 серпня 2022 року.



Голова науково-методичної комісії

Ольга АНОЩЕНКО

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни "Аналітична геометрія" складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавр спеціальності 111- Математика, 113 – Прикладна математика, 014.04 – Середня освіта (Математика)

освітня програма «Математика», «Прикладна математика», «Математика та інформатика»

### 1. Опис навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни Аналітична геометрія є оволодіння методом координат при вирішенні геометричних задач на площині і в просторі, а також оволодіння базовими поняттями лінійної алгебри.

Основними завданнями вивчення дисципліни є розвиток просторового мислення і вміння робити геометричні висновки з алгебраїчних і аналітичних обчислень.

Кількість кредитів – 8

Загальна кількість годин – 240

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
<b>Нормативна / за вибором</b>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
<b>1-й</b>	
Семестр	
<b>1-й – 2-й</b>	
Лекції	
<b>64 год.</b>	
Практичні, семінарські заняття	
<b>64 год.</b>	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
<b>112 год.</b>	
у тому числі індивідуальні завдання	
розрахунково-графічна робота (1)	

### 1.6. Заплановані результати навчання

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

#### **Знати :**

- Основи векторної алгебри.
- Визначення афінного та евклідового просторів.
- Визначення скалярного, векторного та мішаного добутків.
- Ознаки колінеарності та компланарності векторів.
- Рівняння прямих і площин в афінному та евклідовому просторах.
- Визначення опуклих множин, визначення опуклої оболонки та її механічний зміст.
- Канонічні форми кривих і поверхонь 2-го порядку.
- Властивості рухів, теореми про класифікацію рухів на площині та в просторі.

#### **Уміти :**

- обчислювати довжину вектора та кути між векторами;
- знаходити скалярний, векторний, подвійний векторний та змішаний добутки векторів, орієнтовану площу паралелограму та орієнтований об'єм паралелепіпеду, формули перетворення базисів та координат;
- складати параметричні, загальні та нормовані рівняння прямих і площин;
- знаходити кут між прямими (площинами) та кут між прямою та площиною, відхилення та відстань від точки до прямої (площини), відстань між мимобіжними прямими;

- записати перетворення центральної, осьової симетрії та симетрії відносно площини;
- записати осьовий поворот за допомогою кватерніонів;
- знайти рівняння геометричного місця точок за його описом;
- знаходити фокуси, директриси, асимптоти та ексцентриситет кривих другого порядку; центр, осі (площини) симетрії кривих (поверхонь) другого порядку; дотичні площини до поверхні другого порядку та прямолінійні твірні;
- обчислювати інваріанти кривих та поверхонь другого порядку;
- визначати тип кривої (поверхні) другого порядку по її загальному рівнянню та знаходити канонічну систему координат;
- записати аналітичний вираз для руху на площині та в просторі.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні загальні компетентності :

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу, володіння культурою мислення;
- здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями, використовувати знання про сучасну природничу картину світу в освітній та професійній діяльності, застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- здатність використовувати основні методи, способи та засоби одержання, зберігання, переробки інформації;
- здатність працювати з комп'ютером як засобом управління інформацією.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні фахові компетентності :

- володіння основними положеннями класичних розділів математики, її базовими ідеями та методами;
- здатність здійснювати логічний аналіз математичних об'єктів і процедур та конкретизацію абстрактних математичних знань у процесі вивчення математики;
- володіння культурами математичного мислення, логічною, алгоритмічною та евристичною; розуміння загальної структури математичного знання, взаємозв'язку між різними математичними дисциплінами; здатність користуватися мовою математики, коректно виражати та аргументовано обґрунтовувати наявні знання;
- здатність будувати математичні моделі для вирішення практичних проблем; розуміння критеріїв якості математичного моделювання;
- здатність застосовувати різні сценарії вивчення конкретного математичного матеріалу, накопичувати та систематизувати різні варіанти доказів теорем, розв'язків задач, банків ключових задач тощо;
- володіння основними положеннями історії розвитку математики, еволюції математичних ідей та основними концепціями сучасної математичної науки.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні ПРН:

- Знати основи і аксіоматику геометрії. Знати основні класи геометричних та топологічних об'єктів: афінні та евклідові простори (зокрема, тривимірний), топологічні та метричні простори, відображення, характерні для таких просторів, диференційовані криві та поверхні, властивості цих об'єктів та теореми про них. Уміти досліджувати геометричні та топологічні об'єкти та використовувати їх у теоретичних та практичних задачах. Володіти геометричними і топологічними методами при вирішенні теоретичних і практичних задач.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### Семестр 1.

#### *Розділ 1. Основи векторної алгебри*

##### *Тема 1. Вектори, координати, афінні координатні системи.*

Напрявлені відрізки. Геометричні вектори та операції над ними. Лінійний векторний простір. Базис лінійного простору. Координати вектора. Розкладання вектору за базисом. Афінна система координат. Формула поділу відрізків у даному відношенні. Перетворення базисів і координат. Орієнтація.

##### *Тема 2. Спеціальні добутки векторів та їх використання.*

Скалярний добуток. Проекція вектору на пряму, вісь та площину. Евклідов простір. Векторний добуток. Площа паралелограму та його перетворення при заміні базису. Ознака колінеарності векторів. Подвійний векторний добуток. Тотожність Якобі. Поняття про алгебру Лі. Мішаний добуток векторів. Ознака компланарності векторів. Об'єм паралелепіпеду та його перетворення при заміні базису. Формула Лапласа.

#### *Розділ 2. Застосування векторів в геометрії.*

##### *Тема 1. Прямі на афінній та евклідовій площині, в афінному та евклідовому просторі.*

Види рівнянь прямої на афінній площині та в просторі (векторне, параметричне, загальне). Позиційні задачі типу (точка -- пряма) та (пряма -- пряма) на афінній площині та в просторі. Рівняння прямої на евклідовій площині. Метричні задачі на площині (відстані та кути). Центральна та осьова симетрія.

##### *Тема 2. Площини і прямі в афінному та евклідовому просторі*

Види рівнянь площини в афінному та евклідовому просторі (векторне, параметричне, загальне). Позиційні задачі типу (точка -- площина), (пряма -- площина) та (площина – площина) в афінному та евклідовому просторах. Загальне рівняння прямої в евклідовому просторі. Метричні задачі в просторі (відстані та кути між прямими та площинами). Центральна, осьова симетрія. Симетрія відносно площини. Кватерніони та опис осьового повороту.

#### *Розділ 3. Застосування методів аналітичної геометрії.*

##### *Тема 1. Опуклі множини*

Рівняння відрізка, аналітичний опис опуклої множини. Опукла оболонка. Теорема Крейна-Мільмана. Механічний зміст опуклої оболонки. Задача лінійної оптимізації.

##### *Тема 2. Задачі на геометричні місця точок.*

Циклоїда, епіциклоїда, гіпоциклоїда. Конхоїда Нікомеда. Еліпс, гіпербола та парабола.

### Семестр 2.

#### *Розділ 1. Канонічні рівняння кривих та поверхонь 2 порядку.*

**Тема 1. Парабола, еліпс та гіпербола.**

Канонічне рівняння, директоріальна та оптична властивість параболи. Канонічне рівняння, фокальна, директоріальна та оптична властивість еліпсу. Канонічне рівняння, фокальна, директоріальна та оптична властивість гіперболи. Полярні рівняння параболи, еліпса і гіперболи.

**Тема 2. Однопараметричні сімейства еліпсів, гіпербол та парабол**

Рівняння еліпса, гіперболи і параболи, віднесені до вершини. Сім'ї еліпсів і гіпербол із спільним фокальним параметром. Сім'ї співфокусних еліпсів та гіпербол. Еліптична система координат. Сім'ї еліпсів і гіпербол із спільним ексцентриситетом.

**Тема 3. Канонічні поверхні 2-го порядку.**

Циліндричні поверхні. Поверхні обертання. Поверхні переносу. Канонічні форми рівнянь поверхонь другого порядку: еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди, конуси, циліндри. Прямолінійні твірні на поверхні однопорожнинного гіперболоїду. Прямолінійні твірні на поверхні гіперболічного параболоїду.

**Розділ 2. Спільна теорія кривих і поверхонь 2-го порядку.****Тема 1. Спрощення рівняння кривої і поверхні 2-го порядку.**

Спільні властивості рівняння кривих і поверхонь 2-го порядку. Спрощення рівняння 2-го порядку. Класифікаційна теорема для кривих 2-го порядку. Класифікаційна теорема для поверхонь 2-го порядку.

Взаємне розташування прямої та кривої/поверхні 2-го порядку. Діаметри та діаметральні площини. Центр та площини симетрії.

**Тема 2. Інваріанти рівняння 2-го порядку.**

Інваріанти відносно паралельного переносу. Інваріанти відносно ортогонального перетворення базисів. Застосування інваріантів для знаходження канонічного рівняння.

**Розділ 3. Рухи на площині і в просторі.****Тема 1. Рухи та їх аналітичний опис.**

Загальне означення і аналітичний опис рухів. Ортогональні перетворення та ортогональні матриці.

**Тема 2. Теорема Шаля**

Теорема Шаля для рухів площини. Теорема Шаля для рухів простору.

### 3. Структура навчальної дисципліни Семестр 1

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усьог	у тому числі					усього	у тому числі				
		о	л	п	лаб.	інд.		с. р.	л	п	лаб.	інд.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Основи векторної алгебри</b>												
Тема 1. Вектори, координати, афінні координатні системи.	14	4*	4*			6						
Тема 2. Спеціальні добутки векторів та їх використання	18	4*	4*			10						
Усього за розділом 1	32	8	8			16						
<b>Розділ 2. Застосування векторів в геометрії.</b>												
Тема 1. Прямі на афінній та евклідовій площині, в афінному та евклідовому просторі.	18	6*	6*			10						

Тема 2. Площини і прями в афінному та евклідовому просторі	16	6*	6*			10						
Усього за розділом 2	44	12	12			20						
<b>Розділ 3. Застосування методів аналітичної геометрії.</b>												
Тема 1. Опуклі множини	20	6*	6*			8						
Тема 2. Задачі на геометричні місця точок.	18	6*	4*			8						
Контрольна робота	2		2									
Розрахунково-графічна робота	4					4						
Усього за розділом 2	44	12	12			20						
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>						

\*(За дистанційною формою, на платформі MOODLE)

## Семестр 2

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усьог	у тому числі					усього	у тому числі				
		о	л	п	лаб.	інд.		с. р.	л	п	лаб.	інд.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Канонічні рівняння кривих та поверхонь 2 порядку.</b>												
Тема 1. Парабола, еліпс та гіпербола.	18	6	6			6						
Тема 2. Однопараметричні сімейства еліпсів гіпербол та парабол.	14	4	4			6						
Тема 3. Канонічні поверхні 2-го порядку.	14	4	4			6						
Усього за розділом 1	46	14	14			18						
<b>Розділ 2. Спільна теорія кривих і поверхонь 2 порядку.</b>												
Тема 1. Спрощення рівняння кривої і поверхні 2-го порядку.	28	10	10			8						
Тема 2. Інваріанти рівняння 2-го порядку.	14	4	2			8						
Усього за розділом 2	42	14	12			16						
<b>Розділ 3. Рухи на площині і в просторі</b>												
Тема 1. Рухи та їх аналітичний опис.	14	2	2			12						
Тема 2. Теорема Шаля для рухів площини. Теорема Шаля для рухів простору.	16	2	2			12						
Контрольна робота	2		2									
Усього за розділом 3	22	4	4			22						
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>						

**4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять  
Семестр 1**

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Спрямовані відрізки. Геометричні вектори та операції над ними. Лінійний векторний простір.	2
2	Базис лінійного простору. Координати вектора. Розкладання вектору за базисом.	2
3	Афінна система координат. Формула поділу відрізків у даному відношенні.	2
4	Перетворення базисів і координат. Орієнтація	2
5	Скалярний добуток. Проекція вектору на пряму, вісь та площину.	2
6	Векторний добуток. Площа паралелограму та трикутника. Ознака колінеарності векторів.	2
7	Подвійний векторний добуток. Мішаний добуток векторів. Ознака компланарності векторів. Об'єм паралелепіпеду, тетраедру.	2
8	Види рівнянь прямої на афінній площині та в просторі (векторне, параметричне, загальне). Позиційні задачі типу (точка -- пряма) та (пряма -- пряма) на афінній площині та в просторі	2
9	Рівняння прямої на евклідовій площині. Метричні задачі на площині (відстані та кути). Центральна та осьова симетрія	1
10	Види рівнянь площини в афінному та евклідовому просторі (векторне, параметричне, загальне).	2
11	Позиційні задачі типу (точка -- площина), (пряма -- площина) та (площина -- площина) в афінному та евклідовому просторах просторі	2
12	Загальне рівняння прямої в евклідовому просторі. Метричні задачі в просторі (відстані та кути між прямими та площинами).	2
13	Центральна, осьова симетрія. Симетрія відносно площини.	2
14	Кватерніони та опис осевого повороту	2
15	Рівняння відрізка, аналітичний опис опуклої множини. Опукла оболонка. Задача лінійної оптимізації.	2
16	Задачі на геометричні місця точок	1
17	<i>Контрольна робота</i>	2
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

**Семестр 2**

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Канонічне рівняння, директоріальна та оптична властивість параболи.	2
2	Канонічне рівняння, фокальна, директоріальна та оптична властивість еліпсу.	4
3	Канонічне рівняння, фокальна, директоріальна та оптична властивість гіперболи.	2
4	Полярні рівняння параболи, еліпса і гіперболи. Рівняння еліпса, гіперболи і параболи, віднесені до вершини.	2
5	Канонічні форми рівнянь поверхонь другого порядку: еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди, конуси, циліндри.	2
6	Прямолінійні твірні на поверхні однопорожнинного гіперболоїду.	4
7	Прямолінійні твірні на поверхні гіперболічного параболоїду	4
8	Спрощення рівняння кривої 2-го порядку.	2
9	Спрощення рівняння кривої 2-го порядку.	2
10	Діаметри та діаметральні площини. Центр та площини симетрії.	2
11	Інваріанти рівняння 2-го порядку.	2
12	Рухи на площині і в просторі. <i>Контрольна робота</i>	4



<b>Разом</b>	<b>32</b>
--------------	-----------

**5. Завдання для самостійної роботи**  
**Семестр 1**

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Розв'язання задач за темами: Геометричні вектори та операції над ними. Базис лінійного простору. Афінна система координат. Перетворення базисів і координат. [3] № 2, 4, 10, 14, 18, 20, 22, 26, 30, 38, 40, 52, 54, 66, 70, 78, 80, 82.	6
2	Розв'язання задач за темами: Скалярний добуток. Векторний добуток. Подвійний векторний добуток. Мішаний добуток векторів. [3] № 84, 88, 90, 94, 100, 104, 106, 118, 110, 112, 128, 130, 136, 138, 142, 148, 150, 152, 154, 158, 160, 164, 166, 168, 177, 178, 180, 184, 186, 188, 196.	10
3	Розв'язання задач за темами: Види рівнянь прямої на афінній площині та в просторі (векторне, параметричне, загальне). Позиційні задачі типу (точка -- пряма) та (пряма -- пряма) на афінній площині та в просторі. Рівняння прямої на евклідовій площині. [3] № 230, 232, 236, 238, 244, 248, 250, 254, 256, 260, 262, 266, 268, 274, 278, 280, 288, 294, 298, 302, 304, 310, 312, 314, 424, 426, 428, 434, 438.	10
4	Розв'язання задач за темами: Види рівнянь площини в афінному та евклідовому просторі (векторне, параметричне, загальне). Позиційні задачі типу (точка -- площина), (пряма -- площина) та (площина -- площина) в афінному та евклідовому просторах просторі. Загальне рівняння прямої в евклідовому просторі. [3] № 334, 336, 340, 342, 346, 348, 352, 354, 356, 360, 362, 366, 368, 372, 378, 380, 386, 388, 394, 396, 400, 406, 410, 412, 414, 416, 418, 420, 425, 427, 434, 438, 442, 446, 448, 450, 452, 458, 462, 468, 474.	10
5	Розв'язання задач за темами: Взаємне розташування точок, прямих і площин (різні задачі) [3] № 476, 478, 480, 482, 484, 486, 488, 490, 496, 500, 504, 506.	8
6	Розв'язання задач за темами: Задачі на геометричні місця точок. Кватерніони та опис осьового повороту. [3] № 226, 228, 1046, 1048.	4
7	Розрахунково-графічна робота.	8
	<b>Разом</b>	<b>56</b>

**Семестр 2**

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Розв'язання задач за темами: . Канонічне рівняння, фокальна, директоріальна та оптична властивість еліпсу. Канонічне рівняння, фокальна, директоріальна та оптична властивість гіперболи. [3] № 512, 514, 518, 520, 524, 528, 534, 538, 542, 548, 558, 560, 562, 578, 582, 598, 600.	4
2	Розв'язання задач за темами: Канонічне рівняння, директоріальна та оптична властивість параболи. Полярні рівняння параболи, еліпса і гіперболи. [3] № 608, 610, 614, 618, 620, 622, 624, 626, 628, 632, 634, 638, 650.	4
3	Розв'язання задач за темами: Взаємне розташування прямої і кривої 2-го порядку. [3] № 664, 666, 672, 674, 678, 680, 684, 712, 714, 720, 722, 726, 738, 742, 782.	6
4	Розв'язання задач за темами: Циліндричні поверхні. Поверхні обертання. Поверхні переносу. [3] № 882, 886, 888, 892, 894, 902, 904, 914, 924, 926, 930.	4



5	5	5	10	5	5	5	20	60	40	100
---	---	---	----	---	---	---	----	----	----	-----

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія. – Харків: Основа, 1993
2. В. В. Кириченко, Н. Ю. Петкевич, А. П. Петравчук. Аналітична геометрія. — Київ: ВПЦ «Київський університет», 2003. — 192 с.
3. Збірник задач з аналітичної геометрії / За ред. В. В. Кириченка. — Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2005. — 228 с.

### Допоміжна література

1. Ямпольський О.Л. Аналітична геометрія. Вектори, прямі і площини. Навч.-метод. Посібник, ХНУ ім. Каразіна. Харків, 2020. 116 с.
2. Ямпольський О.Л., Шугайло О.О. Аналітична геометрія. Канонічні криві та поверхні другого порядку. Навч.-метод. Посібник, ХНУ ім. Каразіна. Харків, 2021. 100 с.
3. Ямпольський О.Л. Аналітична геометрія. Криві і поверхні другого порядку: загальна теорія. Навч.-метод. Посібник, ХНУ ім. Каразіна. Харків, 2021. 96 с.

### 11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. [www-library.univer.kharkov.ua](http://www-library.univer.kharkov.ua)
2. <http://library.kpi.kharkov.ua>