Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

ЗАТВЕРДЖУЮ

Голова приймальної комісії,
ректор Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна

________________ Віль БАКІРОВ

ПРОГРАМА

вступного іспиту зі спеціальності для вступників на навчання на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика»

Затверджено за засіданні
Вченої ради факультету
математики і інформатики
Протокол №1 від 14.01.2020 р.

Голова Вченої ради факультету
математики і інформатики

______________ Г. М. Жолткевич

Харків 2020

Лінійна алгебра

1. Системи лінійних рівнянь. Теореми Крамера і Кронекера-Капеллі. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь. [1, Гл. 1], [2, Гл. 7, § 31-33]
2. Лінійні простори: лінійна комбінація, лінійна оболонка, лінійна незалежність, базис, вимірність. [2, Гл. 1], [3, Гл. 2], [4, Часть 1, § 1-2]
3. Лінійні оператори в скінченновимірних просторах. Зв'язок між вимірністю ядра та вимірністю образу. Матриця оператора, власні значення та власні вектори. [1, Гл. 7, § 31-33], [3, Гл. 5]
4. Аксіоми скалярного добутку. Евклідів простір. Самоспряжені оператори в скінченновимірних просторах та їх квадратичні форми. Зведення до діагонального вигляду. [2, Гл. 2], [3, Гл. 5], [4, Частина 2, § 5-8]

Математичний аналіз

1. Частинні похідні та диференціал функції багатьох змінних. Екстремум і умовний екстремум. Формула Тейлора. Неявні відображення.
2. Інтеграл Рімана функції дійсної змінної , формула Ньютона-Лейбніца. Кратний інтеграл, зведення до повторного.
3. Невласні інтеграли, абсолютна та умовна збіжності.
4. Числові та функціональні ряди. Абсолютна, умовна та рівномірна збіжності. Властивості сум функціональних рядів.
5. Зв'язки між подвійними і криволінійним, поверхневим і криволінійним, потрійним і поверхневим інтегралами. Формули Гріна, Гаусса-Остроградського та Стокса.
6. Ряд Фур'є. Властивості. Питання збіжності.

Функціональний аналіз.

1. Гільбертів простір. Ортонормовані системи та ряди Фур'є. Нерівність Бесселя та рівність Парсеваля. Теорема про існування ортонормованого базису в сепарабельному гільбертовому просторі. [1, § 12.1, 12.3]
2. Банахів простір. Умова неперервності лінійного оператора. Норма оператора. Спряжений простір. [1, § 6.4]
3. Теорема Гана – Банаха про продовження функціоналів та теорема Гана – Банаха про відокремлення опуклих множин. [1, § 5.4, 9.1, 9.3]

Комплексний аналіз

1. Елементарні функції комплексного змінного і здійснювані ними конформні відображення. [1, Гл.1], [2, Розд.5,6,7], [3,Гл.2].
2. Теорема про інтеграл уздовж замкненого контуру. Інтегральна формула Коші. [1, Гл.2], [2, Розд.11] [3,Гл.1].
3. Розклад голоморфної функції в степеневий ряд. Нерівність Коші для коефіцієнтів. Теорема Ліувілля. [1, Гл.2], [2, Розд.12], [3,Гл.1]
4. Принцип максимуму модуля для аналітичних функцій. [1, Гл.4], [3,Гл.1].
5. Розкладання аналітичних функцій в ряд Лорана. Класифікація ізольованих особливих точок. [1, Гл.2], [2, Розд.13], [3,Гл.1]
6. Теорія лишків. Приклади застосування до обчислення інтегралів. [1, Гл.2], [2, Розд.15,17], [3,Гл.5].
7. Принцип аргументу і теорема Руше. [1, Гл.4], [2, Розд.14], [3,Гл.1].

Геометрія

1. Тензори і тензорні поля, коваріантне диференціювання тензорів [1, Гл. 3], [2, § 17, 22, 28]
2. Ріманова метрика. Ріманова зв'язність. Тензор кривини ріманової метрики. Секційна кривина [1], [2, § 29, 30], [8].
3. Перша та друга фундаментальні форми гіперповерхні та їх коваріантні похідні. Рівняння Гаусса і Кодацці для гіперповерхні. [1, § 2.3, 2.5, 2.8], [5, Гл. 3], [8]
4. Поверхні і метрики сталої гауссової кривини, мінімальні поверхні. Теорема Гільберта. Теорема Бернштейна. [1, § 2.10, 2.12], [6, § 64, § 97], [3, § 96], [7].
5. Екстремалі варіаційної задачі для функціоналу дії. Рівняння Ейлера-Лагранжа. Екстремалі функціоналів енергії та довжини кривої. Геодезичні лінії, їх рівняння і властивості. [1, § 2.9.1], [2, § 31]

Топологія

1. Аксіоми топології. Відкриті і замкнені підмножини. Неперервні відображення топологічних просторів. Гомеоморфізм. Топологічний інваріант. [1, § 4.1, 4.4], [2, Гл. 1, § 1-3],
2. Аксіоми зліченності. Сепарабельність. Теорема Ліндельофа (про зліченне підпокриття). Приклади сепарабельних та несепарабельних просторів. [2, п.1.6], [3, Гл. 2]
3. Аксіоми відокремлюваності. Аксіома Гаусдорфа. Збіжність послідовності в топологічному просторі. [3, Гл. 2], [1, § 2.12], [2, Гл. 3, § 1],

4. Компактні топологічні простори. Теорема Веєрштрасса. Компактні підмножини R^n. [3, Гл. 2], [1, § 4.5].
5. Метричний простір і його топологія. Послідовності, що збігаються, і фундаментальні. Повнота. Принцип стискаючих відображень. Компактність в метричному просторі. [3, Гл. 2].
6. Зв'язні та лінійно зв'язні топологічні простори. Теорема про проміжне значення неперервної функції. Теорема Брауера про нерухому точку: доведення в одновимірному випадку. [1, § 4.6, 5.1.2].

Звичайні диференціальні рівняння

1. Інтегрування деяких класів диференціальних рівнянь першого порядку (з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні, в повних диференціалах).

2. Теореми існування, єдиності, продовжуваності розв'язків задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. Неперервна та диференційовна залежність від параметрів та початкових даних.

3. Лінійні диференціальні рівняння та системи лінійних диференціальних рівнянь: властивості розв'язків. Знаходження розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

4. Стійкість за Ляпуновим розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь. Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Метод функцій Ляпунова.

Диференціальні рівнняя з частинними похідними

1. Крайові задачі для рівняння Лапласа. Функція Гріна задачі Діріхле [2,гл. 4]; [3, Chapter 2].
2. Узагальнена (слабка) похідна та простори Соболєва [1.Гл.3], [4, Sect.5.2].
3. Задача Коші для одновимірного рівняння теплопровідності. [2, гл. 3]; [4, Sect.7.1]
4. Хвильове рівняння в обмеженій області. Початково-крайова задача. Власні коливання та власні частоти. Розв'язання методом власних функцій. [1, гл.5]; [4, Sect.7.2]

Література:

Лінійна алгебра:

1. А.Г.Курош, Курс высшей алгебры, Москва, Наука, 1975.
2. И.М.Гельфанд, Лекции по линейной алгебре. – Москва, Наука, 1971. – 272 с.
3. В.А.Ильин, Э.Г.Позднак, Линейная алгебра, Москва, Физматлит., 2001. – 272 с.
4. А.И.Кострикин, Ю.И.Манин, Линейная алгебра и геометрия, Москва, Наука, 1986– 309 с.

Математичний аналіз:

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. -М. : Наука, -- Т. 1-3.
2. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. –М. : МГУ, 1985. -- Т. 1-2.
3. Дороговцев А. Я. Математический анализ. - К. : Факт, 2004.
4. Рудин У. Основы математического анализа. – М. : Мир, 1976.

Комплексний аналіз:

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч.1. М., Наука, 1985.
2. Самойленко В.Г. и др. Комплексний аналіз, приклади і задачі. Київський університет, 2010.
3. Лаврентьев М.А , Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1973

Функціональний аналіз:

1. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека"). Російськомовна версія: http://page.mi.fu-berlin.de/werner99/kadetsbook/Kadets_Functional_Analysis.pdf

Геометрія:

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Основа, 1995.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современая геометрия. М. Наука, 1979 и 1986.
3. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. ОНТИ, 1935.
4. Аминов Ю. А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. М. Наука, 1987.
5. Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий. Киев, Наукова Думка. 2002
6. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М., ГИТТЛ, 1956.

7. Ниче И. С. «Математика», 1967, т. 11, № 3, с. 37-100
8. Позняк Э.Г, Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М., МГУ, 1990.
9. Бураго Ю.Д, Залгаллер В.А. Введение в риманову геометрию. М. Наука, 1994.
10. Громолл Д, Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М. Мир, 1971.

Топологія:

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Основа, 1995.
2. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М. Высш. школа., 1979
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. Наука, 1976.
4. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Г.. Введение в дифференциальную геометрию в целом. М., Наука, 1973.
5. Хатчер А. Алгебраическая топология. МЦНМО, 2010.
6. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологи. М. Наука, 1991.
7. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М. Наука, 1977.

Звичайні диференціальні рівняння:

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник.
4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
5. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.

Диференціальні рівняння з частинними похідними:

1. Михайлов В.§ Дифференциальные уравнения в частных производных, М.: Наука, 1983.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1966, 1972, 1977.
3. Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1983;(Part I).
4. Evans L.C. Partial Differential Equations, Providence: AMS, 1998.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ ВСТУПНИКІВ

Вступний іспит зі спеціальності проводиться у формі співбесіди. Кожен білет складається з трьох теоретичних питань з наведеного вище переліку. Відповідь на кожне питання білету оцінюється у 100 балів. Загальна оцінка обраховується як середнє арифметичне оцінок за трьома завданнями з округленням у бік збільшення.

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	Пояснення
90 – 100	Відмінно	Вступник демонструє глибоке розуміння і вільне володіння теоретичним матеріалом, обізнаність з літературою, може навести приклади і пояснити зміст понять і результатів, викладення
70 – 89	Добре	Вступник демонструє розуміння значної частини теоретичного матеріалу, може навести приклади і пояснити зміст понять і результатів, викладення є грамотним і логічним, з незначними неточностями.
50 –69	Задовільно	Вступник в цілому орієнтується в теоретичному матеріалі, може навести приклади і пояснити зміст частини понять і результатів, викладення є неповним, містить неточності.
1–49	Незадовільно	Вступник не орієнтується у значній частині теоретичного матеріалу, допускає суттєві помилки, не може пояснити зміст понять і результатів.

Голова предметної комісії О.Л. Ямпольський

Відповідальний секретар приймальної комісії О. О. Анощенко