

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра фундаментальної математики

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**

Проректор з науково-  
педагогічної роботи

Олександр ГОЛОВКО

---

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

## **Геометрія груп Лі**

рівень вищої освіти **магістр**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

Р

29 серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Петров Євген В'ячеславович – кандидат фізико-математичних наук,  
старший викладач кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
протокол № 1 від 26 серпня 2022 року.

Завідувач кафедри



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (наукової) програми «Математика».

Гарант освітньої (наукової) програми



Ганна ВИШНЯКОВА

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики протокол № 1 від 29 серпня 2022 року.

Голова науково-методичної комісії

Ольга АНОЩЕНКО

Програма навчальної дисципліни “Геометрія груп Лі” складена відповідно до освітньо-наукової програми підготовки магістр спеціальність **111-математика** освітня програма «Математика»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Геометрія груп Лі” є надання майбутнім фахівцям знань з теорії Лі, геометрії груп Лі та однорідних просторів.

1.2 Основними завданнями вивчення дисципліни “Геометрія груп Лі” є навчання студентів теоретичним основам теорії груп Лі та однорідних просторів, їхньої геометрії та методам її застосування у інших розділах математики.

1.3. Кількість кредитів – 4

1.4. Загальна кількість годин - 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
2-й	
Семестр	
4-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
Індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання.

У результаті вивчення даного курсу студент повинен мати необхідні знання та уміти досліджувати гладкі многовиди та геометричні структури на них та використовувати їх у теоретичних та практичних задачах

- **знати** : Основні поняття теорії Лі: означення топологічної групи, групи Лі, підгрупи Лі, гомоморфізму та ізоморфізму груп Лі, властивості лівих та правих зсувів, означення та властивості зв'язної компоненти одиниці. Теорема Картана. Основні приклади груп Лі (загальні та спеціальні лінійні, ортогональні, псевдоортогональні, унітарні, спеціальні ортогональні та унітарні). Означення та властивості лівоінваріантного векторного поля, означення та властивості експоненціального відображення. Випадок матричних груп Лі. Побудова дужки Лі та її властивості. Дужка Лі лівоінваріантних векторних полів.
- Означення алгебри, алгебри Лі, підалгебри Лі, ідеалу, гомоморфізму та ізоморфізму алгебр Лі, алгебри Лі групи Лі. Приклади класичних алгебр Лі.

- Означення представлення групи, представлення групи Лі, представлення алгебри Лі, властивості та приклади представлень. Означення внутрішнього автоморфізму, означення та властивості приєднаного представлення групи Лі та алгебри Лі.
- Теореми про зв'язок підгруп Лі з підалгебрами Лі, про зв'язок гомоморфізмів груп Лі та алгебр Лі. Теорема існування та єдиності групи Лі для даної алгебри Лі, теорема Адо.
- Означення лівоінваріантної та біінваріантної метрики на групі Лі, інваріантної білінійної форми, форми Кіллінга. Формули ріманової зв'язності та кривини інваріантних метрик на групах Лі. Геодезичні в групах Лі. Біінваріантні метрики та напівпрості алгебри Лі. Компактні групи та алгебри Лі.
- Означення дії групи на множині, гладкої дії групи Лі на гладкому многовиді, вільної, ефективної, транзитивної дії, стабілізатора. Приклади та властивості дій.
- Визначення однорідного простору групи Лі, однорідного ріманового простору. Теорема Маєрса-Стінрода. Інваріантність метрики однорідного ріманового простору.
- Означення ріманової субмерсії. Формули О'Нейла.
- Формули для обчислення секційних кривин та кривини Річчі однорідного простору.
- Визначення кілінгового поля, симетричного та локально симетричного простору. Різні характеристики симетричних просторів.
- Основні приклади симетричних просторів: простори постійної кривини, проективні простори, грасманові многовиди.

#### уміти :

- Обчислювати для матричної групи Лі її алгебру Лі, знаходити базис цієї алгебри, структурні константи, форму Кіллінга.
- Обчислювати матричну експоненту та знаходити однопараметричні підгрупи в матричних групах Лі.
- Обчислювати зв'язність та кривину лівоінваріантної та біінваріантної метрики на групі Лі.
- Обчислювати зв'язність та кривину, тензор Річчі інваріантної метрики на однорідному просторі.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### Розділ 1. Групи Лі, алгебри Лі та інваріантні метрики.

#### Тема 1. Групи Лі, приклади, основні властивості

- Класичні матричні групи.
- Топологічні групи, основні означення, приклади.
- Групи Лі, основні означення, приклади.
- Ліві та праві зсуви, зв'язна компонента одиниці та її властивості.
- Знаходження топологічної структури класичних груп.
- Дотичні простори до класичних груп.

#### Тема 2. Лівоінваріантні поля, експоненціальне відображення, дужка Лі

- Лівоінваріантні поля, їх властивості.
- Експоненціальне відображення та його властивості. Однопараметричні підгрупи.
- Побудова дужки Лі на дотичному просторі в одиниці групи.
- Дужка Лі лівоінваріантних полів.

#### Тема 3. Алгебри Лі

- Алгебри та асоціативні алгебри.

- Алгебри Лі, властивості, приклади. Алгебра Лі групи Лі.

#### Тема 4. Представлення груп та алгебр Лі

- Представлення групи, представлення групи Лі, приклади. Приєднане представлення групи Лі.
- Представлення алгебри Лі, приклади. Приєднане представлення алгебри Лі.

#### Тема 5. Основні теореми теорії Лі

- Теорема про підгрупи та підалгебри Лі.
- Теорема про гомоморфізми груп та алгебр Лі.
- Теорема про існування та єдиність групи Лі з даною алгеброю Лі.

#### Тема 6. Лівоінваріантні та біінваріантні метрики

- Лівоінваріантні метрики, приклади побудови.
- Лівоінваріантна зв'язність, формули для зв'язності та кривини лівоінваріантної метрики.
- Біінваріантна метрика, формули для зв'язності та кривини.
- Опис груп Лі, що допускають біінваріантні метрики.

### Розділ 2. Однорідні та симетричні простори

#### Тема 7. Дії груп на множинах, однорідні простори

- Дія групи на множині, властивості.
- Гладка дія групи Лі на многовиді. Властивості стабілізаторів. Приклади.
- Структура многовиду на просторі суміжних класів.
- Гладка структура на однорідному просторі групи Лі.

#### Тема 8. Інваріантні ріманові метрики

- Інваріантна метрика. Рімановий однорідний простір.
- Опис інваріантної метрики у випадку ефективної дії. Компактність стабілізатора.
- Ріманові субмерсії та формули О'Нейла.
- Формули кривини інваріантної метрики. Випадок нормальної метрики.
- Приклад Берже.

#### Тема 9. Симетричні простори

- Означення та критерії симетричного простору.
- Структура алгебри Лі групи ізометрій симетричного простору. Незвідні простори.
- Симетричні простори компактного та некомпактного типу. Формули для кривини.

## 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усь ого	у тому числі					усьог о	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	ср		л	п	лаб	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Групи Лі, алгебри Лі та інваріантні метрики.</b>												
Тема 1. Групи Лі, приклади, основні властивості	16	6	4			6						
Тема 2. Лівоінваріантні поля, експоненціальне відображення, дужка Лі	14	4	6			4						
Тема 3. Алгебри Лі	8	2	2			4						
Тема 4. Представлення груп та алгебр Лі	8	2	2			4						
Тема 5. Основні теореми теорії Лі	12	4	2			6						
Тема 6. Лівоінваріантні та біінваріантні метрики	12	2	4			6						
Усього за розділом 1	70	20	20			30						
<b>Розділ 2. Однорідні та симетричні простори</b>												
Тема 7. Дії груп на множинах, однорідні простори	12	4	4			4						
Тема 8. Інваріантні ріманові метрики	14	4	4			6						
Тема 9. Симетричні простори	10	4	2			4						
Підготовка до іспиту	14		2			12						
Усього за розділом 2	50	12	12			26						
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>						

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ п\п	Назва теми	Кількість годин
1	Групи Лі, приклади, основні властивості	4
2	Лівоінваріантні поля, експоненціальне відображення, дужка Лі	6
3	Алгебри Лі	2
4	Представлення груп та алгебр Лі	2
5	Основні теореми теорії Лі	2
6	Лівоінваріантні та біінваріантні метрики	4
7	Дії груп на множинах, однорідні простори	4
8	Інваріантні ріманові метрики	4
9	Симетричні простори	2
10	Підготовка до заліку	2
	Усього	<b>32</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання теоретичного матеріалу з використанням конспекту лекцій та рекомендованої літератури за темами:	
1	Групи Лі, приклади, основні властивості	6
2	Лівоінваріантні поля, експоненціальне відображення, дужка Лі	4
3	Алгебри Лі	4
4	Представлення груп та алгебр Лі	4
5	Основні теореми теорії Лі	6
6	Лівоінваріантні та біінваріантні метрики	6
7	Дії груп на множинах, однорідні простори	4
8	Інваріантні ріманові метрики	6
9	Симетричні простори	4
10	Підготовка до заліку	12
	Усього	<b>56</b>

#### 6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом.

#### 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

#### 8. Методи контролю

Опитування, контрольна робота, залік.

#### 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль та самостійна робота						Контрольна робота, перед-бачена навчальним планом			Разом	Залік	Сума	
Розділ 1						Розділ 2						
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T1	T2	T3	20	60	40	100
5	5	5	5	4	4	4	4	4				

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано



## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. S. Helgason. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. – AMS, 2001.
2. R. Bryant. An introduction to Lie groups and symplectic geometry // In: Geometry and Quantum Field Theory. – AMS, 1995.
3. A.W. Knap. Lie groups beyond an introduction. – Birkhauser, 1996.

### Допоміжна література

1. A. Besse. Einstein Manifolds. – Springer, 1987.
2. J. Cheeger, D.G. Ebin. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. – AMS, 2008.
3. S. Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry. – Wiley, 1996.

### 4. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернет, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. [www-library.univer.kharkov.ua](http://www-library.univer.kharkov.ua)
2. <http://puremath.univer.kharkov.ua/~petrov>