Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

“**ЗАТВЕРДЖУЮ**”

Проректор з науково-

педагогічної роботи

Пантелеймонов А.В.

“\_\_\_\_”\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2018 р.

# Робоча програма навчальної дисципліни

**"ТЕОРІЯ ОПЕРАТОРІВ"**

спеціальність (напрям) **111 – Математика**

спеціалізація

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(шифр, назва спеціалізації)

факультет **математики і інформатики**

2018 / 2019 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2018 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Щербина Марія Володимирівна, член-кор.АН України, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики

Протокол від 27 серпня 2018 року № 1.

Завідувач кафедри Ямпольський О.Л.

Програму погоджено методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від 27 серпня 2018 року № 1.

Голова методичної комісії Анощенко О.О.

**Вступ**

Програма навчальної дисципліни “ **ТЕОРІЯ ОПЕРАТОРІВ** ” складена відповідно до освітньо-професійної (освітньо-наукової) програми підготовки **бакалавр**

спеціальності (напряму) **111 – Математика**

спеціалізації

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**1. Опис навчальної дисципліни**

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є ознайомлення майбутніх бакалаврів зі спектральною теорією обмежених операторів в Гільбертовому просторі

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є опанування майбутніми бакалаврами основними методами дослідження обмежених операторів, включаючи дослідження спектру теорему для обмежених самоспряжних операторів та теорію Фредгольма для компактних операторів.

1.3. Кількість кредитів - **3**

1.4. Загальна кількість годин - **90**

|  |  |
| --- | --- |
| 1.5. Характеристика навчальної дисципліни | |
| **за вибором** | |
| Денна форма навчання | Заочна (дистанційна) форма навчання |
| Рік підготовки | |
| **3-й** |  |
| Семестр | |
| **6-й** |  |
| Лекції | |
| **32 год.** |  |
| **Практичні,** семінарські заняття | |
| **16 год.** |  |
| Лабораторні заняття | |
|  |  |
| Самостійна робота | |
| **42 год.** |  |
| Індивідуальні завдання | |
|  | |

1.6. Заплановані результати навчання:

**Знати:**

* означення та головні властивості компактних та обмежениз самоспряжних операторів
* методи дослідження спектру компактних операторів;
* методи побудови спектрального розкладання для обмежених самоспряжних операторів;
* методи побудови спектрального розкладання для унітарних операторів.
* **Уміти:**
* користуватися теоремами Фредгольма для компактних операторів
* будувати спектральне розкладання для обмежених самоспряжних операторів;
* будувати спектральне розкладання для унітарних операторів.

**2. Тематичний план навчальної дисципліни**

**Розділ 1. Основні властивості простору Гільберта.**

* **Тема 1.** *Базові відомості про простір Гільберта.*

Приклади лінійних просторів. Скалярний добуток векторів та відповідна топология у просторі. Повні та неповні простори. Нерівність Коши. Ортонормований базіс у гільбертовому просторі. Сепарабельні та несепарабельні простори. Приклади. Ізоморфність сепарабельних просторів.

* **Тема 2.** *Розкладання по ортогональному базісу.*

Ряди Фур’є. Единість розкладання у ряд Фур’є. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля. Метод Грамма-Шмідта ортогоналізації системи незалежних векторів.

* **Тема 3.** *Геометрія гільбертового простору*Відстань від точки до опуклої замкнутої множини. Ортогональне доповнення замкнутого підпростору. Розкладання простору в ортогональну суму.
* **Тема 4.** *Лінійні функціанали в гільбертовому просторі*. Поняття про лінійний функціанал. Теорема Ріса та загальний вигляд лінійного неперервного функціаналу.
* **Тема 5.** *Біліеійні функціанали та квадратичні форми.*

Властивості білінійного обмеженого функціаналу. Загальний вигляд білінійного обмеженого функціаналу. Квадратичні форми та їх зв’язок з білінійними обмеженого функціаналами. Позитивні квадратичні форми. Нерівності для самоспряжних операторів.

**Розділ 2. Компактні оператори у гільбертовому просторі.**

* **Тема 6.** *Поняття компактного оператора* Означення компатного оператору та його основні властивості. Збіжність послідовностей компактних операторів.
* **Тема 7.** *Резольвента оператору та його спектр.* Означення резольвенти та її основні властивості. Резольвентна множина оператору та його спектр.
* **Тема 8.** *Теорія Фредгольму компактних операторів.*

Доведення теорем Фредгольму для компактних операторів. Спектральне розкладання для самоспряжних компактних операторів.

* **Тема 9.** *Застосування теорем Фредгольму в теорії інтегальних рівнянь.* Інтегральні рівняння першого та другого роду. Рівняння Вальтерра. Ознаки компактності інтегральних операторів з необмеженими ядрами.

Теорема єдиності.

**Розділ 3. Спектральна теорема для обмежених самоспряжних та унітарних операторів.**

* **Тема 10.** *Побудова функцій від самоспряжних обмежених операторів*.

Монотонні послідовності операторів та їх збіжність. Побудова функцій, що є границямимонотонно спадних послідовностей поліномів.

* **Тема 11.** *Спектральне розкладання для самоспряжнихі.*

Побудова спектральних проекторів. Спектральна міра та її властивості. Спектральне зображення самоспряжного оператору

* **Тема 12.** *Спектральна теорія унітарних операторів*. Функції від унітарних операторів. Спектральні проектори та сперктральне зображення унітарного оператору

**3. Структура навчальної дисципліни**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Назви розділів і тем | Кількість годин | | | | | |
| Денна форма | | | | | |
| Усього | у тому числі | | | | |
| Л | п | лаб | інд | ср |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **Розділ 1. Основні властивості простору Гільберта.** | | | | | | |
| **Тема 1.** Базові відомості про простір Гільберта. | 5 | 2 | 1 |  |  | 2 |
| **Тема 2.** Розкладання по ортогональному базісу. | 5 | 2 | 1 |  |  | 2 |
| **Тема 3.** Геометрія гільбертового простору | 5 | 2 | 1 |  |  | 2 |
| **Тема 4** Лінійні функціанали в Гільбертовому просторі. | 6 | 2 | 2 |  |  | 2 |
| **Тема 5.**  Біліеійні функціанали та квадратичні форми. | 5 | 2 | 1 |  |  | 2 |
| **Разом за розділом 1** | **26** | **10** | **6** |  |  | **10** |
| **Розділ 2. Компактні оператори у гільбертовому просторі** | | | | | | |
| Тема 6. Поняття компактного оператора | 8 | 2 | 1 |  |  | 5 |
| Тема 7. Резольвента оператору та його спектр | 8 | 2 | 1 |  |  | 5 |
| **Тема 8.** Теорія Фредгольму компактних операторів. | 8 | 2 | 1 |  |  | 5 |
| **Тема 9.** Застосування теорем Фредгольму в теорії інтегальних рівнянь. | 8 | 4 | 1 |  |  | 3 |
| **Разом за розділом 2** | **32** | **10** | **4** |  |  | **18** |
| **Розділ 3. Спектральна теорема для обмежених самоспряжних та унітарних операторів.** | | | | | | |
| **Тема 10.** Побудова функцій від самоспряжних обмежених операторів. | 12 | 4 | 2 |  |  | 6 |
| **Тема 11.** Спектральне розкладання самоспряжних операторів | 14 | 6 | 2 |  |  | 6 |
| **Тема 12.** Спектральна теорія унітарних операторів. | 6 | 2 | 2 |  |  | 2 |
| **Разом за розділом 3** | **32** | **12** | **6** |  |  | **16** |
|  |  |  |  |  |  |  |
| **Усього годин** | **90** | **32** | **16** |  |  | **42** |

**4. Теми практичних занять**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № з/п | С | Кількість годин |
| 1 | Головні властивості гільбертового простору | 6 |
| 2 | Компактні оператори та їх застосування в інтегральних рівняннях | 4 |
| 3 | Спектральне розкладання обмежених самоспряжних та компактних операторів | 6 |
|  | **Разом** | **16** |

**5. Завдання для самостійної роботи**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №  з/п | Назва теми | Кількість  годин |
| 1 | Полнота класичних функціанальних просторів | 2 |
| 2 | Розкладання в ряди Фур’є в функціанальних просторах та використання нерівності Бесселя та рівності Парсеваля в задачах | 2 |
| 3 | Розкладання простору в ортогональну суму підпросторів та використання загального вигляду лінійних та білінійних функцианалах | 6 |
| 4 | Компактні оператори. Оператори Гільберта-Шмідта. Доведення компактності різноманітних операторів | 5 |
| 5 | Резольвента та спектр оператору. Використання нерівностей для резольвенти | 5 |
| 6 | Теореми Фредгольма та їх застосування для рішення інтегральних рівнянь. Оператор Вальтерра та його спектр | 8 |
| 7 | Побудова функцій від оператору. Розкладання одиниці та типи спектру | 8 |
| 8 | Спектральна теорема для унітарних операторів. Перетворення Келі. | 8 |
|  | Разом | **42** |

**6. Індивідуальні завдання**

*Не передбачені планом*

**7. Методи контролю**

Навчання здійснюється у формі лекцій, практичних занять, а також у формі самостійної роботи (опрацювання навчального матеріалу, розв’язання учбових задач); контрольна робота, семестровий підсумковий залік.

**8. Схема нарахування балів**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поточний контроль та самостійна робота | | | | | | | | | | | | | Контрольна  робота | Сума |
| Розділ 1 | | | | | Розділ 2 | | | | Розділ 3 | | | Разом |
| Т1 | Т2 | Т3 | Т4 | Т5 | Т6 | Т7 | Т8 | Т9 | Т10 | Т11 | Т12 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 60 | 40 | 100 |

**Шкала оцінювання**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка за національною шкалою | |
| для екзамену | для заліку |
| 90 – 100 | відмінно | зараховано |
| 70-89 | добре |
| 50-69 | задовільно |
| 1-49 | незадовільно | не зараховано |

**Критерії оцінювання**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Оцінка в балах | Оцінка за національною шкалою | |
| Оцінка | Пояснення | |
| 90 – 100 | Відмінно | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою. |
| 70 – 89 | Добре | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками. |
| 50 –69 | Задовільно | Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками. |
| 1–49 | Незадовільно | Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки |

**9. Рекомендована література**

**Основна література**

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т1- К: Вища школа, 1978.
2. Рид, М., Саймон, Б.,Методы современной математической физики. Т1– М.: Мир, 1977.

**Допоміжна література**

1. Eidelman, Yu., Milman, V.,Tsolomitis, A. Functional Analysis. Introductian.- American mathematical society, Providence, 2017.
2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве - М: Наука., 1965.

**10. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення**

### Wolfram Math World: <http://mathworld.wolfram.com/OperatorTheory.html>

Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Спектральная\_теория](https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_problem)