

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**  
Декан факультету  
математики і інформатики  
Григорій ЖОЛТКЕВИЧ  
“18” 08 2024 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**Диференціальна геометрія**

рівень вищої освіти **перший(бакалаврський)**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **обов’язкова**

факультет **математики і інформатики**

2024/2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**ГОРЬКАВИЙ Василь Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики

Протокол від 26 серпня 2024 року № 1

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від 27 серпня 2024 року № 1

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавр спеціальності (напряму) **111-математика** спеціалізації

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія» полягає в оволодінні основами диференціальної геометрії кривих та поверхонь у 3-вимірному евклідовому просторі.

1.2. Основні завдання вивчення дисципліни «Диференціальна геометрія» полягають у послідовному застосуванні методів математичного аналізу, лінійної алгебри та топології для вивчення геометричних властивостей кривих і поверхонь в тривимірному просторі.

1.2.1. Формування наступних інтегральної та загальних компетентностей:

ІК01. Здатність розв'язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп'ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК03. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК07. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

1.2.2. Формування наступних фахових компетентностей:

ФК01. Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК02. Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.

ФК04. Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізнити правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

1.3. Кількість кредитів – **8**

1.4. Загальна кількість годин – **240**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
<b>Обов'язкова</b>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
<b>2-й, 3-й</b>	
Семестр	
<b>4-й, 5-й</b>	
Лекції	
<b>64 год.</b>	
Практичні, семінарські заняття	
<b>64 год.</b>	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
<b>112 год.</b>	
Індивідуальні завдання	
розрахунково-графічні роботи (1)	

1.6. Заплановані результати навчання

У відповідності до освітньо-професійної програми «Математика» по завершенню курсу будуть досягнуті наступні результати навчання:

РН04. Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

РН14. Знати теоретичні основи і застосовувати методи аналітичної та диференціальної геометрії для розв'язування професійних задач.

Досягнення результатів навчання відбувається за рахунок

**знань:**

- визначення регулярної кривої і поверхні;
- визначення натурального параметру для кривої;
- визначення кривини і скруту кривої;
- основну теорему теорії кривих на площині і в просторі;
- визначення сферичного образу кривої і поверхні;
- визначення першої і другої фундаментальних форм для поверхні;
- визначення ізометрії та конформного відображення, критерії;
- визначення головних кривин та головних напрямів на поверхні, ліній кривини;
- визначення гаусової та середньої кривин поверхні;
- класифікацію точок регулярної поверхні за щільнодотичним параболоїдом і гаусовою кривиною;
- визначення асимптотичних напрямів та асимптотичних ліній;
- дериваційні формули Гауса і Вейнгартена;
- визначення геодезичної лінії;
- визначення мінімальної поверхні;
- означення паралельного переносу вектора уздовж кривої
- формулу Гауса-Бонне;
- означення тензора;
- означення коваріантної похідної тензора;
- означення тензора кривини;

**та умінь:**

- розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умовивиконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями (ПРН10.)
- розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей (ПРН11);
- знайти кривину і крутіння кривої;
- знайти рівняння ребер і граней тригранника Френе;
- знайти довжину кривої на заданому проміжку;
- знайти параметричне рівняння плоскої кривої за її кривизною, радіусом кривизни та опорною функцією;
- знайти еволюту та евольвенту плоскої кривої;
- знайти першу та другу фундаментальні форми поверхні;
- знайти площу області на поверхні;
- знайти кут між кривими на поверхні;
- знайти головні кривини і напрямки на поверхні;
- знайти гаусову і середню кривини поверхні;
- знайти лінії кривини та асимптотичні лінії на поверхні;
- знайти геодезичну кривизну кривої на поверхні;
- знайти коваріантну похідну тензора;
- знайти компоненти тензора кривини.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### Семестр 4.

#### **Розділ 1.** Способи завдання кривих і поверхонь.

##### *Тема 1. Способи завдання кривих*

Параметризовані криві. неявно задані криві. Регулярні криві. Дотична пряма. Нормаль до плоскої кривої.

##### *Тема 2. Способи завдання поверхонь*

Параметризовані поверхні. неявно задані поверхні. Регулярні поверхні. Дотична площина. Нормаль до поверхні.

#### **Розділ 2.** Теорія кривих

##### *Тема 1. Теорія плоских кривих*

Основні положення теорії кривих. Поняття регулярної кривої. Натуральна параметризація. Кривина кривої. Формули Френе. Основна теорема теорії плоских кривих. Обвідна. Еволюта і евольвента плоскої кривої. Овали, теорема про 4 вершини овалу. Овали сталої ширини.

##### *Тема 2. Теорія просторових кривих*

Репер Френе та тригранник Френе. Кручення кривої. Формули Френе. Щільний дотик кривих і поверхонь. Щільно дотична площина та щільно дотична сфера. Основна теорема теорії кривих у  $E^3$ . Індикатриса дотичних, повна кривина, нерівність Фенхеля-Борсука.

#### **Розділ 3.** Теорія поверхонь.

##### *Тема 1. Перша фундаментальна форма поверхні*

Поняття регулярної поверхні. Дотична площина поверхні. Перша фундаментальна форма поверхні. довжина кривої, кут між кривими, площа області на поверхні. Відображення поверхонь, Ізометрія, Конформні відображення.

##### *Тема 2 Друга фундаментальна форма поверхні*

Друга фундаментальна форма поверхні. Дотичний параболоїд поверхні. Сферичне відображення. Гаусова кривина поверхні. Нормальна кривина. Головні кривини і головні напрямки. Формули Родріга. Індикатриса Дюпена. Формула Ейлера. Цілком омбілічні поверхні. Лінії кривини. Асимптотичні лінії. Геодезична кривина кривої. Геодезичні лінії.

##### *Тема 3 Основні рівняння теорії поверхонь*

Дериваційні формули Гауса і Вейнгартена. Теорема Egregium Гауса. Рівняння Гауса і Кодацці. Теорема Бонне.

### Семестр 5.

#### **Розділ 1.** Спеціальні класи поверхонь.

##### *Тема 1. Спеціальні координатні системи на поверхнях*

Ортогональні координатні сітки. Координати з ліній кривини. Асимптотична координатна сітка. Чебишевська координатна сітка. Напівгеодезичні декартові координати. Лема Гауса та напівгеодезичні полярні координати. Геодезичні як локально найкоротші.

*Тема 2. Поверхні сталої гаусової кривини*

Метрики сталої кривини, теорема Міндінга. Будова поверхні нульової кривини. Теорема Гільберта. Теорема Лібмана.

*Тема 3. Мінімальні поверхні.*

Варіація довжини кривої. Геодезичні як екстремалі функціонала довжини. Варіація площі поверхні. Мінімальні поверхні. Гелікоїд, катеноїд та поверхня Шерка як єдині мінімальні поверхні в своїх класах.

**Розділ 2.** Елементи внутрішньої геометрії поверхонь і многовидів*Тема 1. Формула Гауса-Бонне.*

Абсолютний (коваріантний) диференціал векторного поля. Паралельні векторні поля на поверхнях. Паралельні векторні поля уздовж кривої. Паралельний перенос вектора вздовж замкненого контуру. Формула Гауса-Бонне. Інтегральна формула Гауса. Теорема Якобі.

*Тема 2. Тензори в диференціальній геометрії.*

Алгебраїчні операції над тензорами. Диференціювання тензора. Диференціально-геометрична зв'язність. Тензор кривини. Тензор Річчі і скалярна кривина.

**3. Структура навчальної дисципліни****Семестр 4**

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усьо го	у тому числі					усьо го	у тому числі				
		л	п	лаб	інд.	с.р.		л	п	лаб	інд.	С.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Способи завдання кривих і поверхонь</b>												
Тема 1. Способи завдання кривих	12	2	2			8						
Тема 2. Способи завдання поверхонь	12	2	2			8						
Разом за розділом 1	24	4	4			16						
<b>Розділ 2. Теорія кривих</b>												
Тема 1. Теорія плоских кривих	22	6	6			10						
Тема 2. Теорія просторових кривих	16	4	4			8						
Разом за розділом 2	38	10	10			18						
<b>Розділ 3. Теорія поверхонь</b>												
Тема 1. Перша фундаментальна форма поверхні	20	6	6			8						
Тема 2. Друга фундаментальна форма поверхні	24	8	8			8						
Тема 3. Основні рівняння теорії поверхонь	14	4	4			6						
Разом за розділом 3	58	18	18			22						
Усього годин	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>						

## Семестр 5

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усьо го	у тому числі					усьо го	у тому числі				
		л	п	лаб	інд.	с.р.		л	п	лаб	інд.	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Спеціальні класи поверхонь</b>												
Тема 1. Спеціальні координатні системи на поверхнях	24	6	6			12						
Тема 2. Поверхні сталої гаусової кривини	24	6	6			12						
Тема 3. Мінімальні поверхні	24	6	6			12						
Разом за розділом 1	72	18	18			36						
<b>Розділ 2. Елементи внутрішньої геометрії поверхонь і многовидів</b>												
Тема 1. Формула Гауса-Бонне	22	6	6			10						
Тема 2 Тензори в диференціальній геометрії.	26	8	8			10						
Разом за розділом 2	48	14	14			20						
Усього годин	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>						

## 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

## Семестр 4

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Поняття регулярної кривої. Дотична пряма. Нормаль до плоскої кривої.	2
2	Параметризовані поверхні. Неявно задані поверхні. Регулярні поверхні. Дотична площина. Нормаль до поверхні	2
3	Натуральна параметризація. Кривина кривої. Формули Френе.	2
4	Основна теорема теорії плоских кривих	2
5	Обвідна. Еволюта і евольвента плоскої кривої	2
6	Репер Френе та тригранник Френе. Скрут кривої. Формули Френе.	2
7	Щільний дотик кривих і поверхонь. Щільно дотична площина та щільно дотична сфера.	2
8	Поняття регулярної поверхні. Дотична площина поверхні. Перша фундаментальна форма поверхні. довжина кривої.	2
9	Кут між кривими, площа області на поверхні. Ізометрія. Конформні відображення.	2

10	Друга фундаментальна форма поверхні. Дотичний параболоїд поверхні. Сферичне (Гаусове) відображення. Гаусова кривина поверхні.	2
11	Нормальна кривина. Головні кривини і головні напрямки. Формули Родріга.	2
12	Індикатриса Дюпена. Формула Ейлера. Цілком омбілічні поверхні.	2
13	Лінії кривини. Асимптотичні лінії.	2
14	Геодезична кривина кривої. Геодезичні лінії	2
15	Дериваційні формули Гауса і Вейнгартена.	2
16	Теорема Egregium Гауса.	4
	<i>Разом</i>	34

### Семестр 5

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Ортогональні координатні сітки. Координати з ліній кривини.	2
2	Третя фундаментальна форма поверхні.	2
3	Асимптотична координатна сітка.	2
4	Напівгеодезичні декартові координати.	2
5	Напівгеодезичні полярні координати.	2
6	Геодезичні лінії на різних класах поверхонь.	2
7	Мінімальні поверхні.	2
8	Абсолютний (коваріантний) диференціал векторного поля.	2
9	Паралельні векторні поля уздовж кривої.	2
10	Паралельний перенос вектору уздовж замкнутого контуру.	2
11	Формула Гауса-Боне.	2
12	Алгебраїчні операції над тензорами.	2
13	Диференціювання тензора.	2
14	Диференціально-геометрична зв'язність.	2
15	Тензор кривини. Тензор Річчі і скалярна кривина.	2
16	Диференціальні параметри Бельтрамі.	4
	<i>Разом</i>	<b>34</b>

### 5. Завдання для самостійної роботи

#### Семестр 4

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Дотична пряма. Нормаль до плоскої кривої.	2
2	Регулярні поверхні. Дотична площина. Нормаль до поверхні	2
3	Натуральна параметризація. Кривина кривої. Формули Френе.	4
4	Основна теорема теорії плоских кривих	2
5	Обвідна. Еволюта і евольвента плоскої кривої	2
6	Репер Френе. Кручення кривої. Формули Френе.	4
7	Щільний дотик кривих і поверхонь	4
8	Перша фундаментальна форма поверхні. довжина кривої.	4
9	Кут між кривими, площа області на поверхні. Ізометрія.	4
10	Друга фундаментальна форма поверхні. Гаусова кривина поверхні.	4



11	Нормальна кривина. Головні кривини і головні напрямки	4
12	Індикатриса Дюпена. Формула Ейлера.	4
13	Лінії кривини. Асимптотичні лінії.	4
14	Геодезична кривина кривої. Геодезичні лінії	4
15	Дериваційні формули Гауса і Вейнгартена.	4
16	Теорема Egregium Гауса.	4
	<i>Разом</i>	<b>56</b>

### Семестр 5

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Ортогональні координатні сітки. Координати з ліній кривини.	2
2	Третя фундаментальна форма поверхні.	2
3	Асимптотична координатна сітка.	4
4	Напівгеодезичні декартові координати.	2
5	Напівгеодезичні полярні координати.	2
6	Геодезичні лінії на різних класах поверхонь.	4
7	Мінімальні поверхні.	4
8	Абсолютний (коваріантний) диференціал векторного поля.	4
9	Паралельні векторні поля уздовж кривої.	4
10	Паралельний перенос вектору уздовж замкнутого контуру.	4
11	Формула Гауса-Бонне.	4
12	Алгебраїчні операції над тензорами.	4
13	Диференціювання тензора.	4
14	Диференціально-геометрична зв'язність.	4
15	Тензор кривини. Тензор Річчі і скалярна кривина.	4
16	Диференціальні параметри Бельтрамі. Лапласіан, дивергенція, ротор.	4
	<i>Разом</i>	<b>56</b>

## 6. Індивідуальні завдання

### Семестр 4

1. Залікове завдання з теорії кривих і поверхонь.

### Семестр 5

2. Залікове завдання з теорії поверхонь.

## 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину та в умовах воєнного стану, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна).

## 8. Методи контролю

облік відвідування аудиторних занять  
перевірка виконання розрахунково-контрольна роботи (1) та контрольних робіт (2),  
підсумковий контроль 4 семестр - залік, 5 семестр екзамен.

## 9. Схема нарахування балів

### Семестр 4

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання							Залік	Сума
Розділ 1		Розділ 2		Розділ 3				
T1	T2	T1	T2	T1	T2	T3		
5		10		10			10	25
							40	100

### Семестр 5

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання					Екзамен	Сума
Розділ 1			Розділ 2			
T1	T2	T3	T1	T2		
15			10		10	25
					40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

### Шкала оцінювання

#### Семестр 4

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
90 – 100	зараховано
70-89	
50-69	
1-49	не зараховано

#### Семестр 5

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

### Критерії оцінювання

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### 10. Рекомендована література

#### Базова

1. Борисенко О.А., *Диференціальна геометрія і топологія*. Основа, 1995
2. Pogorelov A.V., *Differential Geometry*. P. Noordhoff, 1960
3. do Carmo M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, New Jersey, 1976
4. Banchoff Th., Lovett S., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. CRC Press, Boca Raton, 2010

#### Допоміжна

1. Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P., *Modern Geometry - methods and Applications*. Springer, 1991
2. Aminov Y., *Differential Geometry and Topology of Curves*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2000
3. Alencar H., Santos W., Neto G.S., *Differential Geometry of Plane Curves*. Providence, Rhode Island: AMS, 2010