

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра фундаментальної математики

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Проректор з науково-  
педагогічної роботи

Олександр ГОЛОВКО

---

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**Рівняння математичної фізики**

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика, 113 – Прикладна математика**

освітня програма **«Математика», «Прикладна математика»,**

вид дисципліни **обов’язкова**

факультет **математики і інформатики**

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Фастовська Тамара Борисівна, к. ф.-м. н., доцент,  
доцент кафедри фундаментальної математики**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
протокол № 1 від 26 серпня 2022 року.

Завідувач кафедри



Олександр ЯМПОЛЬСКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми



Олександр ЯМПОЛЬСКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми  
«Прикладна математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми

Світлана ІГНАТОВИЧ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і  
інформатики  
протокол № 1 від 29 серпня 2022 року.

Голова науково-методичної комісії

Ольга АНОЩЕНКО

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “**Рівняння математичної фізики**” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр спеціальності 111– Математика, 113 – Прикладна математика** освітня програма «**Математика**», «**Прикладна математика**»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета курсу полягає у навчанні майбутніх спеціалістів основам теорії рівнянь математичної фізики та її застосуванням.

1.2. Завдання курсу полягає у навчанні студентів досліджувати існування та єдиність розв’язків задач математичної фізики та знаходити розв’язки модельних задач еліптичного, параболічного та гіперболічного типів.

1.3. Кількість кредитів – **7**

1.4. Загальна кількість годин – **210**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни		
Нормативна / за вибором		
Денна форма навчання		Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки		
4-й		
Семестр		
7-й	8-й	
Лекції		
24 год.	12 год.	
Практичні, семінарські заняття		
32 год.	32 год.	
Лабораторні заняття		
Самостійна робота		
54 год.	56 год.	
Індивідуальні завдання		

1.6. Заплановані результати навчання:

#### **Знати:**

- основні типи лінійних рівнянь математичної фізики;
- методи теоретичного вивчення проблеми існування розв’язків еліптичних, параболічних та гіперболічних рівнянь.
- 

#### **Уміти:**

- використовувати сучасні методи вивчення проблеми існування розв’язків рівнянь з частинними похідними для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ;

- знаходити точні розв'язки модельних задач еліптичного, параболічного та гіперболічного типів.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

*Розділ 1. Загальна теорія рівнянь з частинними похідними. Теорія гармонічних функцій. Метод функції Гріна для еліптичних задач.*

*Тема 1.* Класифікація лінійних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Постановки основних крайових задач для оператора Лапласа. Поняття класичного розв'язку.

*Тема 2.* Формули Гріна для оператора Лапласа. Гармонічні функції. Теореми про середнє. Принцип максимуму для гармонічних функцій. Наслідки принципу максимуму для гармонічних функцій.

*Тема 3.* Функція Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа. Означення, фізичний зміст, властивості. Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших тривимірних областей.

*Тема 4.* Застосування методу конформних відображень для побудови функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших двовимірних областей

*Розділ 2. Крайова задача рівняння Пуассона в кулі та крузі. Метод Фур'є для рівняння Пуассона в крузі. Метод потенціалів.*

*Тема 1.* Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа в кулі. Класичне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі.

*Тема 2.* Метод розподілу змінних для рівняння Пуассона в крузі.

*Тема 3.* Об'ємний потенціал і його властивості. Потенціал простого шару і його основні властивості. Потенціал подвійного шару і його основні властивості. Теорема про граничні значення потенціалів подвійного і простого шарів. Зведення граничних задач Діріхле і Неймана для оператора Лапласа до граничних інтегральних рівнянь.

*Розділ 3. Спеціальні функції.*

*Тема 1.* Циліндричні функції. Рекурентні формули. Норми функцій Бесселя. Поліноми Лежандра. Властивості поліномів Лежандра. Рекурентні формули. Рівняння Лежандра. Приєднані функції Лежандра. Властивості приєднаних функцій Лежандра. Означення сферичної функції. Приклади.

*Розділ 3. Теорія параболічних рівнянь*

*Тема 1.* Класичні розв'язки рівняння теплопровідності. Принцип максимуму. Його наслідки. Рівняння теплопровідності на всій вісі. Теорема єдиності класичного розв'язку. Однорідне та неоднорідне рівняння теплопровідності на всій вісі. Формули Пуассона.

*Тема 2.* Рівняння теплопровідності на півосі.

*Тема 3.* Рівняння теплопровідності в обмеженій області. Метод Фур'є.

Метод Фур'є для задачі охолодження круглого циліндра.

*Розділ 4. Теорія гіперболічних рівнянь.*

Тема 1. Хвильове рівняння на всій вісі. Формула Даламбера, Пуассона, Кірхгофа. Теорема існування та єдиності класичних розв'язків. Хвильова інтерпретація розв'язків.

Тема 2. Хвильове рівняння на півосі.

Тема 3. Хвильове рівняння в обмеженій області. Метод Фур'є.

Тема 4. Поширення хвиль у просторі. Метод Фур'є для рівняння коливань круглої мембрани.

### 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					ус бо го	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	л а б.	ін д.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 0	1 1	1 2	13
<b>Розділ 1.</b> Загальна теорія рівнянь з частинними похідними. Теорія гармонічних функцій. Метод функції Гріна для еліптичних задач.												
Тема 1. Класифікація лінійних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Постановки основних крайових задач для оператора Лапласа. Поняття класичного розв'язку.	8	2*	2*			4						
Тема 2. Формули Гріна для оператора Лапласа. Гармонічні функції. Теореми про середнє. Принцип максимуму для гармонічних функцій. Наслідки принципу максимуму для гармонічних функцій.	10	4*	-			6						
Тема 3. Функція Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа. Означення, фізичний зміст, властивості. Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших тривимірних областей.	10	2*	2*			6						
Тема 4. Застосування методу конформних відображень для побудови функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших двовимірних областей.	12	2*	2*			8						
Усього за розділом 1	40	10	6			24						
<b>Розділ 2.</b> Крайова задача рівняння Пуассона в кулі та крузі. Метод Фур'є для рівняння Пуассона в крузі. Метод потенціалів.												

Тема 1. Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа в кулі. Класичне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі.	14	4*	2*		8						
Тема 2. Метод Фур'є для рівняння Пуассона в крузі.	12	2*	2*		8						
Тема 3. Об'ємний потенціал і його властивості. Потенціал простого шару і його основні властивості. Потенціал подвійного шару і його основні властивості. Теорема про граничні значення потенціалів подвійного і простого шарів. Зведення граничних задач Діріхле і Неймана для оператора Лапласа до граничних інтегральних рівнянь.	14	4*	2*		8						
Усього за розділом 2	40	10	6		24						
<b>Розділ 3. Спеціальні функції.</b>											
Тема 1. Циліндричні функції. Рекурентні формули. Норми функцій Бесселя. Поліноми Лежандра. Властивості поліномів Лежандра. Рекурентні формули. Рівняння Лежандра. Приєднані функції Лежандра. Властивості приєднаних функцій Лежандра. Означення сферичої функції. Приклади.	10	4	-		6						
Усього за розділом 3	10	4	-		6						

	90	24	12		54						
<b>Розділ 4. Теорія параболічних рівнянь.</b>											
Тема 1. Класичні розв'язки рівняння теплопровідності. Принцип максимуму. Його наслідки. Рівняння теплопровідності на всій вісі. Теорема єдиності класичного розв'язку. Однорідне та неоднорідне рівняння теплопровідності на всій вісі. Формули Пуассона.	14	4	4		8						
Тема 2. Рівняння теплопровідності на півосі.	10	4	4		8						
Тема 3. Рівняння теплопровідності в обмеженій області. Метод Фур'є.	14	6	6		8						
Усього за розділом 4	52	14	14		24						
<b>Розділ 5. Теорія гіперболічних рівнянь.</b>											
Тема 1. Хвильове рівняння на всій вісі. Формула Даламбера, Пуассона, Кірхгофа. Теорема існування та єдиності класичних розв'язків. Хвильова інтерпретація розв'язків.	20	6	6		8						
Тема 2. Хвильове рівняння на півосі.	16	4	4		8						
Тема 3. Хвильове рівняння в обмеженій області. Метод Фур'є.	16	4	4		8						
Тема 4. Поширення хвиль у просторі. Метод Фур'є для	16	4	4		8						

рівняння коливань круглої мембрани.													
Усього за розділом 4	68	18	18			32							
Усього за 2 семестр	120	32	32			56							
	<b>210</b>	<b>56</b>	<b>44</b>			<b>110</b>							

)\* Викладаються дистанційно, на платформі ZOOM

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

1	Зведення лінійних рівнянь другого порядку до канонічного виду.	2
2	Побудова функції Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом симетричного відображення.	2
3	Побудова функції Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом конформного відображення.	2
4	Метод Фур'є для еліптичних рівнянь. Випадок елементарних власних функцій.	2
5	Розв'язання еліптичних рівнянь методом потенціалів.	2
6	Контрольна робота.	2
Усього за 7 семестр		<b>12</b>
1	Задача Коші для рівняння теплопровідності.	4
2	Рівняння теплопровідності на півосі.	4
3	Рівняння теплопровідності на відрізку. Метод Фур'є.	6
5	Задача Коші для хвильового рівняння.	4
6	Хвильове рівняння на півосі.	4
7	Хвильове рівняння на відрізку. Метод Фур'є.	4
8	Задача коливань круглої мембрани. Метод Фур'є із застосуванням циліндричних функцій.	2
9	Контрольна робота.	2
Усього за 8 семестр		<b>32</b>
	<b>Разом</b>	<b>44</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи



№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання додаткового матеріалу за відповідними темами:	
1	Класифікація лінійних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Постановки основних крайових задач для оператора Лапласа. Поняття класичного розв'язку.	4
2	Формули Гріна для оператора Лапласа. Гармонічні функції. Теорема про середнє. Принцип максимуму для гармонічних функцій. Наслідки принципу максимуму для гармонічних функцій.	6
3	Функція Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа. Означення, фізичний зміст, властивості. Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших тривимірних областей.	6
4	Застосування методу конформних відображень для побудови функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших двовимірних областей	8
5	Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа в кулі. Класичне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі.	8
6	Метод Фур'є для рівняння Пуассона в крузі.	8
7	Об'ємний потенціал і його властивості. Потенціал простого шару і його основні властивості. Потенціал подвійного шару і його основні властивості. Теорема про граничні значення потенціалів подвійного і простого шарів. Зведення граничних задач Діріхле і Неймана для оператора Лапласа до граничних інтегральних рівнянь.	8
8	Циліндричні функції. Рекурентні формули. Норми функцій Бесселя. Поліноми Лежандра. Властивості поліномів Лежандра. Рекурентні формули. Рівняння Лежандра. Приєднані функції Лежандра. Властивості приєднаних функцій Лежандра. Означення сферичної функції. Приклади.	6
Усього за 7 семестр		54
9	Класичні розв'язки рівняння теплопровідності. Принцип максимуму. Його наслідки. Рівняння теплопровідності на всій вісі. Теорема єдиності класичного розв'язку. Однорідне та неоднорідне рівняння теплопровідності на всій вісі. Формули Пуассона.	8
10	Рівняння теплопровідності на півосі.	8
11	Рівняння теплопровідності в обмеженій області. Метод Фур'є.	8

12	Хвильове рівняння на всій вісі. Формула Даламбера. Теорема існування та єдиності класичних розв'язків. Хвильова інтерпретація розв'язків.	8
13	Хвильове рівняння на напіввісі.	8
14	Хвильове рівняння в обмеженій області. Метод розподілу змінних. Метод розподілу змінних для рівняння коливань круглої мембрани.	4
15	1. Підготовка до іспиту	4
Усього за 8 семестр	2.	56
	<b>3. Разом</b>	<b>110</b>

### 6. Індивідуальні завдання

*Не передбачені планом*

### 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

### 8. Методи контролю

- контрольна робота (2);
- залік (7-й семестр); екзамен (8-й семестр)

### 9. Схема нарахування балів

#### 7-й семестр

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання								Розділ 3	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Усього	Залік	Сума
Розділ 1				Розділ 2								
T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T1	40	60	40	100	
2	3	3	2	2	2	2	2					

#### 8-й семестр

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання							Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Усього	Екзамен	Сума
Розділ 4			Розділ 5							
Т 1	Т 2	Т 3	Т 1	Т 2	Т 3	Т 4	40	60	40	100
2	3	3	3	3	3	3				

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

### 10. Рекомендована література

#### Базова література

1. Бобик О.І. Рівняння математичної фізики (Класифікація, основні крайові задачі, теорема Ковалевської і характеристики): Текст лекцій. — Львів: ЛДУ, 1990.
2. Бобик О.І. Рівняння математичної фізики (Гармонічні функції, коректність граничних задач для рівняння Лапласа і Пуассона, функція точкового джерела): Текст лекцій.— Львів: ЛДУ, 1990.
3. Бобик О.І., Бобик І.О. Практикум з рівнянь математичної фізики. Ч.1. —Львів, 1996.
4. Бобик О.І., Бобик І.О. Практикум з рівнянь математичної фізики. Ч.2. —Львів, 1996.

#### Допоміжна література

5. Бугрій О.М. Рівняння математичної фізики: методичні вказівки.— Львів: вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006.
6. Бокало М.М. Рівняння математичної фізики (Класифікація рівнянь з частинними похідними. Постановки крайових задач. Задача Коші. Текст лекцій. —Львів: ЛДУ, 1994.
7. Іванчов М.І. Вступ до теорії рівнянь у частинних похідних: текст лекцій.—Львів: іада плюс, 2004.
8. Івасишен С.Д. , Лавренчук В.П., Івасюк Г.П., Рева Н.В. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики. — Чернівці: Вид. дім “Родовід”, 2015.
9. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. — К.: Либідь. – 2001.

### 11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. [www-library.univer.kharkov.ua](http://www-library.univer.kharkov.ua)
2. <http://library.kpi.kharkov.ua>

3. [HTTP://MATHWORLD.WOLFRAM.COM/TOPICS/PARTIALDIFFERENTIALEQUATIONS.HTML](http://MATHWORLD.WOLFRAM.COM/TOPICS/PARTIALDIFFERENTIALEQUATIONS.HTML)

4. Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Differential\\_equation#Partial\\_differential\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation#Partial_differential_equations)

5. MathOverflow: <http://mathoverflow.net/questions/tagged/differential-equations>