Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

 “**ЗАТВЕРДЖУЮ**”

Проректор з науково- педагогічної роботи

 Пантелеймонов А.В.

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

 “\_\_\_\_”\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20 \_\_ р.

# Робоча програма навчальної дисципліни

 **Диференціальна геометрія многовидів**

спеціальність (напрям) **111-математика**

спеціалізація \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(шифр, назва спеціалізації)

факультет **математики і інформатики**

2018 / 2019 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

 27 серпня 2018 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Петров Євген В’ячеславович – кандидат фізико-математичних наук,**

**старший викладач кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики

Протокол від 27 серпня 2018 року № 1.

 Завідувач кафедри Ямпольський О.Л.

Програму погоджено методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від 27 серпня 2018 року № 1.

 Голова методичної комісії Анощенко О.О.

**Вступ**

Програма навчальної дисципліни **“Диференціальна геометрія многовидів”** складена відповідно до освітньо-професійної (освітньо-наукової) програми підготовки **магістр**

спеціальність (напрям) **111-математика**

спеціалізації \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. **Опис навчальної дисципліни**

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Диференціальна геометрія многовидів” є ознайомлення з базовими конструкціями аналізу гладких многовидів та геометричними структурами на них.

1.2 Основними завданнями вивчення дисципліни “Диференціальна геометрія многовидів” є оволодіння методами дослідження геометричних структур на многовидах.

1.3. Кількість кредитів – **5**

1.4. Загальна кількість годин - **150**

|  |
| --- |
|  1.5. Характеристика навчальної дисципліни |
| **Нормативна** / за вибором |
| Денна форма навчання | Заочна (дистанційна) форма навчання |
| Рік підготовки |
| **1-й** |  |
| Семестр |
| **1-й** |  |
| Лекції |
| **32 год.** |   |
| Практичні, семінарські заняття |
| **32 год.** |   |
| Лабораторні заняття |
|  |   |
| Самостійна робота |
| **86 год.** |  |
| Індивідуальні завдання  |
|  |  |

1.6. Заплановані результати навчання.

 У результаті вивчення даного курсу студент повинен

**знати :**

* Основні поняття і теореми диференціальної топології: гладкий многовид, гладке відображення, дотичний простір, диференціал відображення, субмерсія, занурення, вкладення, занурений та вкладений підмноговид, орієнтовний многовид, теорема Сарда, теореми про вкладення, в тому числі теорема Уітні, елементи теорії гладких полів на многовидах: дотичне розшарування, поле, інтегрування, дужка Лі, тензорні поля.
* Основні поняття та результати аналізу гладких форм на многовидах: поняття форми, зовнішньої і симетричної форми, зовнішнього добутку, диференціалу, інтеграл від форми, теорема Стокса.
* Основні поняття ріманової геометрії: ріманова метрика, перша фундаментальна форма, обчислення довжин, кутів та об‘ємів, ріманова зв‘язність, коваріантне диференціювання, ріманові геодезичні, ізометрії та конформні відображення.
* Основні поняття внутрішньої геометрії метричних просторів (внутрішня метрика, найкоротші, геодезичні, функціонал довжини, повнота) та їх застосування до геометрії многовидів, зокрема ріманової. Теорема Хопфа-Рінова-Кон-Фоссена.
* Основні поняття та результати, що пов’язані з кривиною ріманових просторів: оператор кривини, тензор Рімана, секційна кривина, тензор Річчі, скалярна кривина, многовиди постійної секційної кривини, друга варіація довжини геодезичної, теорема Майерса, поля Якобі, спряжені точки, простори Адамара.
* Основні теореми порівняння ріманової геометрії та поняття метричного простору обмеженої кривини.

**уміти :**

* Доводити, що даний топологічний простір є гладким многовидом.
* Доводити, що дане відображення многовидів є гладким, вкладенням, зануренням, субмерсією.
* Обчислювати диференціали зовнішніх форм, інтегрувати зовнішні форми.
* Обчислювати першу фундаментальну форму, довжини кривих, кути між ними та об‘єми.
* Знаходити геодезичні ріманового многовиду, паралельне перенесення поля.
* Знаходити оператор кривини, тензори Рімана та Річчі, секційну кривину.
* Знаходити поля Якобі.

**2. Тематичний план навчальної дисципліни**

 ***Розділ 1. Аналіз на гладких многовидах***

***Тема 1. Основні поняття диференціальної топології***

Зміст

* Многовид, відображення переходу, гладкий многовид, гладка структура.
* Гладке відображення, діфеоморфізм.
* Дотичні вектори і дотичний простір гладкого многовиду. Гладкі функції Урисона.
* Дотичний вектор і регулярність кривої. Диференціал і ранг гладкого відображення.
* Критичні точки і теорема Сарда. Субмерсіі.
* Занурення та вкладення. Теореми про занурення і вкладення (у т.ч. теорема Уітні).
* Підмноговиди. Теорема про прообраз регулярного значення.
* Тензори в точці гладкого многовиду.
* Дотичне розшарування. Векторні поля і їхні властивості. Векторне поле як диференціювання.
* Дужка Лі і її властивості.
* Інтегрування векторних полів.
* Тензорні поля.

# *Тема 2. Аналіз зовнішніх форм*

Зміст

* Форми на многовиді, симетричні і зовнішні форми.
* Кодіфференціал.
* Диференціал зовнішньої форми.
* Орієнтовність гладких многовидів.
* Інтегрування форм на орієнтовних многовидах і теорема Стокса.

***Розділ 2. Ріманова геометрія многовидів***

***Тема 1. Ріманові метрики і метрична геометрія***

 Зміст

* Ріманова метрика, ріманів многовид. Перша фундаментальна форма
* Довжина кривої на рімановому многовиді і її властивості. Кут між кривими.
* Форма об‘єму і об‘єм області.
* Ізометрії і локальні ізометрії.
* Конформні відображення.
* Афінна зв'язність. Коваріантне диференціювання форм.
* Ріманова зв'язність (Леві-Чівіта). Формула Кошуля.
* Функціонал довжини на топологічному просторі. Внутрішня метрика. Найкоротші.
* Внутрішня метрика, що породжена ріманової метрикою. Фінслерова метрика.
* Повнота ріманового многовиду.
* Геодезичні аффінної зв'язності та їхні властивості. Геодезичні на рімановому многовиді.
* Лагранжіан і варіаційна задача на многовиді. Рівняння Ейлера-Лагранжа.
* Геодезичні і найкоротші.
* Довжина кривої в метричному просторі. Теорема Арцела-Асколі для кривих.
* Обмежена компактність. Достатні умови існування найкоротших.
* Теорема Хопфа-Рінова-Кон-Фоссена. Геодезична повнота. Випадок ріманова многовиду.

***Тема 2. Кривина ріманової метрики***

Зміст

* Оператор кривини, тензор Рімана, секційна кривина.
* Кривина Річчі та скалярна кривина. Ейнштейнові многовиди.
* Многовиди постійної секційної кривини. Теорема Шура.
* Друга варіація довжини геодезичної.
* Теорема Майерса.
* Поля Якобі та спряжені точки.
* Поля Якобі на многовидах постійної секційної кривини.
* Теорема Якобі та індексна форма геодезичної.
* Експоненціальне відображення.
* Простори Адамара та теорема Картана-Адамара.
* Теореми порівняння.
* Метричні простори обмеженої кривини.
1. **Структура навчальної дисципліни**

|  |  |
| --- | --- |
| Назви розділів і тем | Кількість годин |
| денна форма | заочна форма |
| усього  | у тому числі | усього  | у тому числі |
| л | п | лаб. | інд. | с. р. | л | п | лаб. | інд. | с. р. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **Розділ 1.** **Аналіз на гладких многовидах** |
| Тема 1. Основні поняття диференціальної топології | 36 | 8 | 8 |  |  | 20 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 2. Аналіз зовнішніх форм | 27 | 6 | 6 |  |  | 15 |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом 1 | 63 | 14 | 14 |  |  | 35 |  |  |  |  |  |  |
| **Розділ 2.** **Ріманова геометрія многовидів**  |
| Тема 1. Ріманові метрики і метрична геометрія | 32 | 6 | 6 |  |  | 20 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 2. Кривина ріманової метрики | 40 | 12 | 8 |  |  | 20 |  |  |  |  |  |  |
| Підготовка до іспиту | 15 |  | 4 |  |  | 11 |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом2 | 87 | 18 | 18 |  |  | 51 |  |  |  |  |  |  |
| Усього годин  | **150** | **32** | **32** |  |  | **86** |  |  |  |  |  |  |

**4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п\п | Назва теми | Кількість годин |
| 1 | Основні поняття диференціальної топології | 8 |
| 2 | Аналіз зовнішніх форм | 6 |
| 3 | Ріманові метрики і метрична геометрія | 6 |
| 4 | Кривина ріманової метрики | 8 |
| 5 | Підготовка до іспиту | 4 |
|  | Разом | **32** |

**5. Завдання для самостійної роботи**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №з/п | Назва теми | Кількістьгодин | Форма контролю |
| 1 | Основні поняття диференціальної топології | 20 | Опитування |
| 2 | Аналіз зовнішніх форм | 15 | Опитування |
| 3 | Ріманові метрики і метрична геометрія | 20 | Опитування |
| 4 | Кривина ріманової метрики | 20 | Опитування |
| 5 | Підготовка до іспиту | 11 | Іспит |
|  | Разом  | **86** |  |

**6. Індивідуальні завдання**

 Не передбачені навчальним планом.

**7. Методи контролю**

Опитування, контрольна робота, іспит.

**8. Схема нарахування балів**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Поточний контроль, самостійна робота |  | Сума |
| Розділ 1 | Розділ 2 | Іспит | 100 |
| Т1 | Т2 | Т1 | Т2 | 40 |
| 15 | 15 | 15 | 15 |

**Шкала оцінювання**

|  |  |
| --- | --- |
| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка |
|  Для іспиту |  Для заліку |
| 90 – 100 | відмінно |  зараховано |
| 70-89 | добре |
| 50-69 | задовільно |
| 1-49 | незадовільно |  не зараховано |

**Критерії оцінювання**

|  |  |
| --- | --- |
| Оцінка в балах  | Оцінка за національною шкалою |
| Оцінка  | Пояснення |
| 90 – 100  | Відмінно | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.  |
| 70 – 89 | Добре | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.  |
| 50 –69 | Задовільно | Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.  |
| 1–49 | Незадовільно | Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки  |

**9. Рекомендована література**

**Основна література**

1. М.М. Постников. Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1988.
2. Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер. Введение в риманову геометрию. – СПб.: Наука, 1994.
3. М.М. Постников. Риманова геометрия. – М.: Факториал, 1998.

**Допоміжна література**

Тема “Основні поняття диференціальної топології”

1. Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972.
2. М. Хирш. Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979.
3. Б.А. Ду­б­ро­вин, С.П. Но­ви­ков, А.Т. Фо­ме­н­ко Со­в­ре­мен­ная гео­ме­т­ри­я. Ме­то­ды и при­ло­же­ни­я*.* – М.: На­у­ка, 1986.
4. Дж. Милнор, Теория Морса. – М.: Мир, 1981.

Тема “Аналіз зовнішніх форм”

1. В.А. Зорич. Математический анализ, часть 2. – М.: Наука, 1984.
2. М. Спивак. Анализ на многообразиях. – М.: Мир, 1965.

Тема “ Ріманові метрики і метрична геометрія ”

1. Ю.Д. Бураго, Д.Ю. Бураго, С.В. Иванов, Курс метрической геометрии. – М. - Ижевск: ИКИ, 2004.
2. С. Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. – М.: Мир, 1970.

Тема “ Кривина ріманової метрики ”

1. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы римановой геометрии. М.: Наука, 1981.
2. А. Бессе. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

**10. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернет, відео-лекції, інше методичне забезпечення**