Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра Прикладної математики

“**ЗАТВЕРДЖУЮ**”

Проректор
з науково-педагогічної роботи
Олександр ГОЛОВКО

_____

“____”_____2022 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Диференціальні рівняння

(назва навчальної дисципліни)

рівень вищої освіти ___перший (бакалаврський)_____

галузь знань___11 – Математика та статистика_____
(шифр і назва)

спеціальність _111 – Математика, 113 – Прикладна математика, _____
_____014.04 – Середня освіта (Математика)_____
(шифр і назва)

освітня програма __111 Математика, 113 Прикладна математика,_____
_____014.04 Математика та інформатика_____
(шифр і назва)

спеціалізація _____
(шифр і назва)

вид дисципліни ___обов’язкова_____
(обов'язкова / за вибором)

факультет ___математики і інформатики_____

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики
“29” серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: ***Макаров Олександр Анатолійович***, кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри Прикладної математики
Протокол від “29” серпня 2022 року №11

Завідувач кафедри Прикладної математики

(підпис) Валерій КОРОБОВ
(прізвище та ініціали)

Програму погоджено з гарантами освітньо-професійних програм факультету математики і інформатики:

Гарант ОПП Математика Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Гарант ОПП Прикладна математика Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Гарант ОПП Математика та інформатика Ганна ЧЕРНОВА

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від “ 29 ” серпня 2022 року № . 1 .

Голова науково-методичної комісії

Ольга АНОЩЕНКО

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки
бакалавр
(назва рівня вищої освіти)

спеціальності (напряму) 113 – прикладна математика, 111– математика,
014.04 Математика та інформатика

спеціалізації _____

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни:
Ознайомлення студентів із сучасною теорією звичайних диференціальних рівнянь.
1.2. Основні завдання вивчення дисципліни:
Навчити студентів теоретичним основам та практичним навичкам в галузі сучасної теорії звичайних диференціальних рівнянь.
1.3. Кількість кредитів: 8
1.4. Загальна кількість годин: 240

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
2-й	-й
Семестр	
4-й	-й
Лекції	
32 год.	год.
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	год.
Лабораторні заняття	
год.	год.
Самостійна робота	
56 год.	год.
у тому числі індивідуальні завдання	
16 год.	
Рік підготовки	
3-й	-й
Семестр	
5-й	-й
Лекції	
32 год.	год.
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	год.
Лабораторні заняття	
год.	год.
Самостійна робота	
56 год.	год.
у тому числі індивідуальні завдання	
16 год.	

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен знати:

- Теореми існування та єдиності розв'язків задачі Коші для лінійних та нелінійних рівнянь та систем.
- Теореми про загальні розв'язки для лінійних та нелінійних рівнянь та систем.
- Означення та способи обчислення функцій від матриці.
- Означення та застосування функцій Коші та Гріна.
- Теореми про загальні розв'язки лінійних та квазілінійних рівнянь з частинними похідними.
- Означення стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості за Ляпуновим.
- Функцію Ляпунова та прямий метод Ляпунова.
- Критерії стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості за Ляпуновим для систем зі сталими коефіцієнтами.
- Методи дослідження на стійкість та нестійкість за першим наближенням.
- Класифікацію особливих точок систем другого порядку.
- Основи теорії керування.

вміти:

- Розв'язувати рівняння з відокремлюваними змінними та рівняння, що зводяться до них.
- Розв'язувати рівняння в повних диференціалах та рівняння, що зводяться до них.
- Розв'язувати лінійні рівняння та системи зі сталими коефіцієнтами та задачі Коші і крайові задачі для них.
- Інтегрувати диференціальні рівняння за допомогою степеневих рядів.
- Розв'язувати лінійні та квазілінійні рівняння з частинними похідними.
- Досліджувати на стійкість розв'язки диференціальних рівнянь та систем.
- Досліджувати лінійні керовані системи зі сталими коефіцієнтами.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Рівняння першого порядку

Тема 1. Основні поняття і означення теорії диференціальних рівнянь. Рівняння з відокремлюваними змінними. Еквівалентність рівняння з відокремлюваними змінними деякому функціональному рівнянню, властивості розв'язків цього функціонального рівняння. Симетрична форма запису рівняння 1-го порядку. Рівняння в повних диференціалах.

Тема 2. Диференціальні рівняння, що не розв'язані відносно похідної. Метод введення параметру.

Розділ 2. Системи диференціальних рівнянь.

Тема 3. Системи диференціальних рівнянь. Зведення рівняння n-го порядку до системи того ж порядку. Лема Гронуолла-Беллмана.

Тема 4. Теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для нелінійних рівнянь та систем. Теореми про залежність розв'язків задачі Коші від параметрів та початкових умов. Продовження розв'язків задачі Коші.

Розділ 3. Лінійні системи та рівняння

Тема 5. Лінійні системи. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи. Комплексні розв'язки лінійних систем.

Тема 6. Визначник Вронського системи вектор-функцій. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи вектор-функцій, їх властивості. Теорема Ліувілля. Лінійно залежні та незалежні системи розв'язків лінійної системи. Фундаментальні матриці розв'язків та їх властивості.

Тема 7. Теореми про загальні розв'язки лінійних однорідної та неоднорідної систем. Методи Коші та Лагранжа пошуку частинних розв'язків неоднорідних лінійних систем.
Тема 8. Лінійні диференціальні рівняння, їх зведення до лінійних систем. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійних рівнянь.
Тема 9. Визначник Вронського системи функцій. Лінійно залежні та незалежні системи функцій та їх властивості. Теорема Ліувілля-Остроградського. Лінійно залежні та незалежні системи розв'язків лінійних однорідних рівнянь, фундаментальні системи розв'язків.
Тема 10. Теореми про загальні розв'язки лінійних однорідного та неоднорідного рівнянь. Методи Коші та Лагранжа пошуку частинних розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь.
Тема 11. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Теореми про комплексну та дійсну форми фундаментальної системи розв'язків для таких рівнянь.
Тема 12. Неоднорідні лінійні рівняння з квазіполіноміальною правою частиною. Теореми про частинні розв'язки таких систем.

Розділ 4. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами

Тема 13. Означення функції від матриці для функції, визначеної на спектрі цієї матриці. Інтерполяційні поліноми та їх властивості. Інтерполяційний поліном Лагранжа-Сильвестра, його властивості та обчислення. Властивості функцій від матриці.
Тема 14. Теорема про фундаментальність матричної експоненти. Теореми про загальний розв'язок та розв'язок задачі Коші для лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Теорема Трохи. Теорема про вигляд фундаментальної матриці розв'язків лінійної системи зі сталими коефіцієнтами. Подання функції від матриці матричним степеневим рядом.
Тема 15. Неоднорідні лінійні системи з квазіполіноміальною правою частиною. Теореми про частинні розв'язки таких систем.
Тема 16. Крайова задача та функція Гріна для лінійних рівнянь та систем.

Розділ 5. Інтегрування степеневими рядами

Тема 17. Степеневі ряди з матричними коефіцієнтами. Лінійні системи з аналітичними коефіцієнтами. Теорема про структуру фундаментальної матриці розв'язків такої системи.
Тема 18. Рівняння класу Фуксу, рівняння Бесселя.

Розділ 6. Нелінійні системи та квазілінійні рівняння

Тема 19. Перші та загальні інтеграли нелінійних систем. Критерій того, що функція є першим (загальним) інтегралом нелінійної системи. Теорема про структуру загального інтеграла. Теореми про зв'язок загального інтеграла з розв'язком нелінійної системи та загальний розв'язок нелінійної системи. Симетрична форма запису нелінійної системи.
Тема 20. Лінійні та квазілінійні рівняння з частинними похідними першого порядку. Системи характеристик. Теорема про зв'язок розв'язків квазілінійного та деякого лінійного рівнянь. Теореми про загальні розв'язки лінійного та квазілінійного рівнянь з частинними похідними першого порядку.
Тема 21. Задача Коші для квазілінійних рівнянь.

Розділ 7. Стійкість за Ляпуновим

Тема 22. Стійкість, асимптотична стійкість та нестійкість за Ляпуновим розв'язків систем диференціальних рівнянь. Функція Ляпунова. Теореми Ляпунова про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість.
Тема 23. Стійкість лінійних систем. Критерії стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості за Ляпуновим для лінійних систем зі сталими коефіцієнтами.
Тема 24. Теореми про стійкість та нестійкість за першим наближенням.
Тема 25. Елементи теорії керування.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	Денна форма						Заочна форма					
	Усього	у тому числі					Усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	ср		л	п	лаб	інд	ср
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1 семестр												
Розділ 1												
Тема 1	12	2	8			2						
Тема 2	6	2	2			2						
Розрахункова робота (ІДЗ)	16					16						
Разом за розділом 1	**34**	**4**	**10**			**20**						
Розділ 2												
Тема 3	4	2	0			2						
Тема 4	6	2	2			2						
Разом за розділом 2	**10**	**4**	**2**			**4**						
Розділ 3												
Тема 5	4	2	0			2						
Тема 6	6	2	2			2						
Тема 7	6	2	2			2						
Тема 8	6	2	2			2						
Тема 9	8	2	2			4						
Тема 10	8	2	2			4						
Тема 11	10	2	4			4						
Тема 12	6	2	2			2						
Контрольна робота	4		2			2						
Разом за розділом 3	***58***	***16***	***18***			***24***						
Розділ 4												
Тема 13	4	2	0			2						
Тема 14	4	2	0			2						
Тема 15	4	2	0			2						
Тема 16	6	2	2			2						
Разом за розділом 4	**18**	**8**	**2**			**8**						
Разом за 1 семестр	**120**	**32**	**32**			**56**						
II семестр												
Розділ 5												
Тема 17	6	2	2			2						
Тема 18	8	4	2			2						
Розрахункова робота (ІДЗ)	16					16						
Разом за розділом 5	**30**	**6**	**4**			**20**						
Розділ 6												
Тема 19	14	4	4			6						
Тема 20	12	4	4			4						
Тема 21	8	2	2			4						
Контрольна робота	6		2			4						
Разом за розділом 6	**40**	**10**	**12**			**18**						
Розділ 7												
Тема 22	16	6	4			6						
Тема 23	12	4	4			4						
Тема 24	10	2	4			4						
Тема 25	12	4	4			4						
Разом за розділом 7	**50**	**16**	**16**			**18**						
Разом за II семестр	***120***	***32***	***32***			***56***						
Усього годин	**240**	**64**	**64**			**112**						

4. Теми семінарських (**практичних,** лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	1 семестр	
1	Рівняння з відокремлюваними змінними та рівняння, що зводяться до них.	6
2	Лінійні рівняння та рівняння Бернуллі.	2
3	Рівняння в повних диференціалах та рівняння, що зводяться до них.	4
4	Рівняння, нерозв'язні відносно похідної.	4
5	Рівняння, що допускають зниження порядку	4
6	Лінійна залежність та незалежність. Визначник Вронського.	4
7	Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами.	6
8	Крайова задача та функція Гріна.	2
	Разом за 1 семестр	***32***
	II семестр	
9	Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами.	6
10	Інтегрування за допомогою степеневих рядів.	6
11	Нелінійні рівняння.	4
12	Лінійні та квазілінійні рівняння з частинними похідними.	6
13	Стійкість за Ляпуновим.	8
14	Основи теорії керування	2
	Разом за II семестр	***32***
	Разом	**64**

5. Завдання для самостійної робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	1 семестр	
1	Рівняння першого порядку	4
2	Системи диференціальних рівнянь	6
3	Лінійні системи та рівняння	30
4	Розрахункова робота (ІДЗ)	16
	Разом за 1 семестр	**56**
	II семестр	
4	Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами	8
5	Розрахункова робота (ІДЗ)	16
6	Інтегрування степеневими рядами	8
7	Нелінійні системи та квазілінійні рівняння	12
8	Стійкість за Ляпуновим	12
	Разом за II семестр	**56**

6. Індивідуальні завдання

Теми індивідуальних завдань:
Семестр I. Диференціальні рівняння першого порядку.
Семестр II. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами.

7. Методи навчання

Частково-пошуковий, пояснювально-ілюстративний. Проблемно-орієнтовані лекції, пояснювально-розрахункові, репродуктивні методи при проведенні практичних занять.

8. Методи контролю

– Перевірка виконання домашніх та індивідуальних завдань, контрольних робіт.

– Проведення заліку та іспиту.

9. Схема нарахування балів

І семестр

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання				**Залік**	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Разом		
Індивідуальне завдання Т1, Т2	Домашнє завдання Т3-Т5	Контрольна робота Т6-Т13		**40**	100
20	20	20	60		

ІІ семестр

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання				**Екзамен**	Сума
Розділ 4	Розділ 5, Розділ 6	Розділ 7	Разом		
Індивідуальне завдання Т14 -Т18	Контрольна робота Т19-Т23	Домашнє завдання Т24 -Т27			
20	20	10	60	**40**	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

Критерії оцінювання

Приклади оцінювання контрольних та самостійних робіт

І семестр

1) Індивідуальне завдання «Рівняння першого порядку», **20 балів** (один з варіантів):

Визначити тип диференціального рівняння і розв'язати його (задачу Коші):

1) $y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$ (4 бали)
2) $xy' \cos y + y' \sin 2y = 1$ (4 бали)
3) $y^2 = (xyy' + 1)\ln x$ (4 бали)
4) $y' = \sqrt[3]{5x - y} + 2$ (4 бали)
5) $(1 + y^2 \sin 2x)\mathrm{d}x - 2y\cos^2 x\,\mathrm{d}y = 0,\ \ y(0) = 3$ (4 бали)

2) Домашнє завдання на тему «Нерозв'язані рівняння відносно похідної та зниження порядку», **20 балів** (один з варіантів):

Розв’язати рівняння (у рівнянні, позначеному *, знайти особливий розв’язок):

1. $yy'' = (y')^2 + 15y^2\sqrt{x}$ (5 балів);
2. $xy'' - y' = x^2 yy'$ (5 балів);
3*. $y = xy' - (2 + y')^2$ (5 балів);
4. Теоретичне запитання (5 балів);

3) Контрольна робота на тему «Лінійні рівняння», **20 балів** (один з варіантів):

1. Розв’язати рівняння $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x+1}$, знаходячи окремий розв’язок за допомогою функції Коші. (5 балів)
2. Розв’язати рівняння $y''' + 4y' = 2x - \cos x$, знаходячи окремий розв’язок методом невизначених коефіцієнтів. (5 балів)
3. Розв’язати задачу Коші: $x^2y'' - 3xy' + 4y = 2x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$. (5 балів)
4. Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння з постійними дійсними коефіцієнтами (можливо меншого порядку), що має дані окремі розв’язки: $3x, \quad x\cos x$. (5 балів)

4) Залікова робота 40 балів (один з варіантів)**.**

1. Знайти визначник крайової задачі і функцію Гріна (**20 балів**)

$$y'' - 4y = f(x) \qquad y(0) - y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

2. Теоретичні запитання (**20 балів**).

<u>II семестр</u>

1) Індивідуальне завдання «Лінійні системи диф. рівнянь зі сталими коефіцієнтами», **20 балів** (один з варіантів):

1. розв’язати методом невизначених коефіцієнтів (4 бали)
2. розв’язати за допомогою матричної експоненти (4 бали)
3. розв’язати за допомогою квазіполіному (5 балів)
4. розв’язати методом варіацій і методом Коші (7 балів)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2(t+1)e^t \\ \dot{y} = 2x - y + 2(t+2)e^t \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 1 \\ \dot{y} = 6y - 2x - 3 \end{cases}$

2) Контрольна робота на розв’язання за допомогою степеневих рядів і на квазілінійні рівняння, **20 балів** (один з варіантів):

Розв'язати рівняння за допомогою степеневих рядів

1. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ (5 балів)

2. $x^2y''+4xy'+(2-3x^2)y=0$ (5 балів)

3. Знайти загальний розв'язок і розв'язати задачі Коші (10 балів)

$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0$. *а)* $\begin{cases}x=y\\x-yz=1\end{cases}$ *б)* $\begin{cases}x=y\\yz=1\end{cases}$

3) Домашнє завдання на тему «Стійкість», **20 балів** (один з варіантів):

1. Дослідити на стійкість розв'язання задачі Коші за визначенням (5 балів),
2. Знайти точки спокою та дослідити їх тип (по 1-му наближенню) (5 балів),
3. Дослідити нульовий розв'язок на стійкість методом Ляпунова (5 балів)

1. $\begin{cases}2ty'+y^2=1\\y(1)=1\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x'=y(x-2)\\y'=x(1-y^2)\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x'=\sin x+4y\\y'=-x+y^3\end{cases}$

4.Теоретичне запитання (5 балів).

4) Приклад екзаменаційного білету (40 балів).

Екзаменаційний білет № …

1. ФМР лінійної однорідної системи (ЛОС) зі сталими коефіцієнтами, її структура. Метод невизначених коефіцієнтів. *(12 балів)*

2. Рівняння класу Фукса. Теорема 2. Приклад. *(12 балів)*

3. Поставити початкові умови так, щоб в одному випадку виконувалися умови теореми Пікара, а в іншому – не виконувалися: $\begin{cases}x'=|x+y|\\y'=\sqrt[3]{y-x}\end{cases}$ *(8 балів)*

4. Поставити початкові умови для квазілінійного рівняння і перевірити його на характеристичність $xy\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}$. *(8 балів)*

10. Рекомендована література

Основна література

1. І.І. Ляшко, О.К.Боярчук, Я.Г. Гай, О.Ф. Калайда. Диференціальні рівняння. – К.: Вища шк., 1987. – 344 с.
2. Л.В. Фардигола. Курс звичайних диференціальних рівнянь, Навчальний посібник. – Київ: Наукова думка, 2022. – 212 с.
3. Г.М. Скляр, Л.В.Фардигола. Елементи теорії керованих систем. – Х.: ХДУ, 1998. – 53 с.
4. А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах ... К.: Вища школа, 1994.– 454 с.
5. А.В. Луценко. Методи інтегрування та пониження порядку диференціальних рівнянь. Методичні вказівки до курсу «Диференціальні рівняння» / Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2008. – 26 с.
6. О.А. Макаров, Т.І. Сморцова. Звичайні диференціальні рівняння. Методичний посібник. / Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2019. – 39 с.

Допоміжна література

1. Philip Hartman. Ordinary Differential Equations. *Classics in Applied Mathematics*, SIAM, 1982