

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник голови
приймальної комісії,
проректор з науково-
педагогічної роботи
Харківського національ-
ного університету
імені В. Н. Каразіна

_____Олександр ГОЛОВКО
«_____» _____ 2025 р.

ПРОГРАМА
додаткового іспиту зі спеціальності
для вступників на навчання на здобуття ступеня доктора філософії
за спеціальністю Е7 «Математика»
(складають особи, які вступають до аспірантури на основі НРК7 з іншої
галузі знань (спеціальності), ніж та, яка зазначена в їхньому дипломі)

Харків 2025

Алгебра

1. Визначення групи, підгрупи. Теорема Лагранжа.
2. Лінійні оператори в скінченновимірних просторах, їх матриці, власні значення та власні вектори.
3. Самоспряжені оператори в скінченновимірних просторах та їх квадратичні форми. Зведення до діагонального вигляду.
4. Системи лінійних рівнянь. Теореми Крамера і Кронекера-Капеллі.

Математичний аналіз

1. Диференційованість функції декількох змінних. Теорія екстремумів.
2. Функціональні ряди. Рівномірна збіжність. Властивості сум функціональних рядів.
3. Інтеграли (Римана і невластивий), залежні від параметра, їх властивості і спосіб обчислення.
4. Кратні інтеграли та їх властивості. Заміна змінних.
5. Поверхневі інтеграли та їх властивості.
6. Зв'язки між подвійними і криволінійним, поверхневим і криволінійним, потрійним і поверхневим інтегралами.

Диференціальна геометрія.

1. Перша квадратична форма регулярної поверхні. Обчислення довжин кривих, кутів між кривими, площ областей.
2. Друга квадратична форма регулярної поверхні. Гаусова і середня кривини поверхні та їх обчислення.
3. Спеціальні лінії на поверхнях: лінії кривини, асимптотичні та геодезичні. Їхні властивості.

Топологія

1. Означення і приклади топологічних просторів. Аксиоми зліченності та відокремлюваності. Теорема Ліндельофа.
2. Означення відображення. Ін'єкція, сюр'єкція та бієкція. Повний прообраз та обернене відображення. Визначення топології через відображення (індукована та фактор-топологія).
3. Неперервні відображення та гомеоморфізми. Гомеоморфізм як відкрито-замкнене відображення. Означення та приклади топологічних інваріантів.
4. Зв'язність та лінійна зв'язність топологічного простору як топологічні інваріанти. Означення області.
5. Компактність топологічного простору як топологічний інваріант. Компактні підмножини в R^n . Теорема Вейерштраса.

Звичайні диференціальні рівняння

1. Теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь.
2. Лінійні диференціальні рівняння та системи рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
3. Стійкість за Ляпуновим розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь.

Комплексний аналіз

1. Елементарні функції комплексного змінного і здійснювані ними конформні відображення.
2. Теорема про інтеграл уздовж замкненого контуру. Інтегральна формула Коші.
3. Принцип максимуму модуля для аналітичних функцій.
4. Ряди Лорана та класифікація ізольованих особливих точок.
5. Теорія лишків. Приклади застосування до обчислення інтегралів.

Рівняння математичної фізики

1. Крайові задачі для рівняння Лапласа. Функція Гріна задачі Діріхле та її властивості.
2. Рівняння Лапласа в кулі, формула Пуассона.
3. Задача Коші для рівняння теплопровідності на всій осі. Формула Пуассона.
4. Початково-крайові задачі для хвильового рівняння на відрізку. Розв'язання початково-крайової задачі Діріхле методом Фур'є.

Функціональний аналіз

1. Метричний простір і його топологія. Послідовності, що збігаються і фундаментальні. Повнота. Принцип вкладених множин.
2. Нормовані простори. Критерій неперервності лінійного оператора. Норма оператора.
3. Компактність в метричних і нормованих просторах. Критерій компактності в скінченновимірному просторі. Теорема Риса про некомпактність одиничної кулі.
4. Банахів простір. Простори L_p . Нерівність Гельдера, функціонал інтегрування з вагою та його норма. Формулювання теореми про загальний вигляд лінійного функціоналу в L_p .
5. Теорема Гана – Банаха і її наслідки.
6. Гільбертів простір. Ортонормовані системи в гільбертовому просторі та ряди Фур'є.
7. Ортогоналізація за Грамом-Шмідтом і теорема про існування ортонормованого базису в сепарабельному гільбертовому просторі.

Література:

Лінійна алгебра:

1. Булдигін В. В. та ін., Лінійна алгебра та аналітична геометрія . К: ТВіМС, 2011.
2. A. Kurosh, Higher Algebra, Mir publishers, 1980.
3. Gelfand I.M., Lectures on Linear Algebra. – Dover, N.Y, 1989.
4. A. Kostrikin, Yu. Manin., Linear Algebra and Geometry, Gordon and Breach Publishers.

Математичний аналіз:

1. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. - К. : «Либідь», 1993.
2. Zorich V., Mathematical analysis. Springer, 2008.
3. Rudin W. Principals of mathematical analysis, International series in pure and applied mathematics, 1976

Комплексний аналіз:

1. Самойленко В.Г. и др. Комплексний аналіз, приклади і задачі. Київський університет, 2010.
2. Shabat B.V. Introduction to complex analysis, Part.1,2. AMS Publishers, 2019.
3. Vladimiroff V. Methods of the theory of function of several complex variable. MIT Press, 2020

Функціональний аналіз:

1. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижигов, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”).

Геометрія:

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Основа, 1995.
2. B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, Modern Geometry — Methods and Applications, Graduate Texts in Mathematics book series (GTM, volume 93)
3. Aminov Yu., Differential geometry and topology of curves, CRC Press, 2003
4. Aminov Yu. The Geometry of Submanifolds, CRC press, 2001.
5. Petersen P. Riemannian Geometry. Springer, 1997.
6. Jost J. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Springer, 2011

Топологія:

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Основа, 1995.
2. Armstrong M.M., Basic Topology. Springer, 2010
3. Hatcher A. Algebraic Topology. Cambrige University Press, 2003
4. Kosniowski C. A first course of algebraic topology. Cambrige University Press, 2010
5. Morris S. Topology without tears. University of New England, 1989

Звичайні диференціальні рівняння.

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник. Київ, «Либідь», 2003
2. Збірник задач підвищеної складності з курсу "Диференціальні рівняння" / О.В.Капустян [та ін.] ; за ред. М. О. Перестюка. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 79 с.
3. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М., Диференціальні та інтегральні рівняння. –К.: «Либідь», 2004
4. Arnold V., Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, 1992

Диференціальні рівняння з частинними похідними:

1. Arnold V., Lectures on Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1997
2. Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1983;(Part I).
3. Evans L.C. Partial Differential Equations, Providence: AMS, 1998.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ ВСТУПНИКІВ

Додатковий вступний іспит зі спеціальності проводиться у письмовій формі. Кожний білет складається з трьох теоретичних питань з наведеного вище переліку. Формулювання питання може бути конкретизоване. Відповідь на кожне питання білету оцінюється у 200 балів.

180-200 балів: вступник демонструє глибоке розуміння і вільне володіння теоретичним матеріалом, обізнаність з літературою, може навести приклади і пояснити зміст понять і результатів, викладення є грамотним, логічним і вичерпним.

140-179 балів: вступник демонструє розуміння значної частини теоретичного матеріалу, може навести приклади і пояснити зміст понять і результатів, викладення є грамотним і логічним, з незначними неточностями.

100-139 балів: вступник в цілому орієнтується в теоретичному матеріалі, може навести приклади і пояснити зміст частини понять і результатів, викладення є неповним, містить неточності.

50-99 балів: вступник погано орієнтується у значній частині теоретичного матеріалу, не може пояснити зміст основних понять і результатів, викладення містить численні неточності.

0-49 балів: вступник не орієнтується у теоретичному матеріалі, допускає суттєві помилки, не може пояснити зміст понять і результатів. Загальна оцінка обраховується як середнє арифметичне оцінок за

трьома завданнями з округленням до цілого числа у бік збільшення.

Вступник може брати участь у конкурсному відборі, якщо його загальна оцінка складає не менше 100 балів.

Голова предметної комісії

Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Протокол засідання приймальної комісії № 2 від 20 березня 2025 року

Відповідальний секретар приймальної комісії

Ганна ЗУБЕНКО