Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

**"ЗАТВЕРДЖУЮ"**
Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

"29" 08 2024 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

**"ЗАДАЧА РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА ТА НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ"**

рівень вищої освіти **другий(магістерський)**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма «**Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

протокол від 27 серпня 2024 року № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:
**Шепельський Дмитро Георгійович доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри фундаментальної математики**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол від 26 серпня 2024 року № 1.

В. о завідувача кафедри Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної) програми Вячеслав ГОРДЕВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики
протокол від 27 серпня 2024 року № 1.

Голова науково-методичної комісії Євген МЕНЯЙЛОВ

# ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “**ЗАДАЧА РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА ТА НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ** ” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки “**магістр»**
спеціальності **111 – Математика**
освітня програма **«Математика»**

## 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є висвітлення основних ідей дослідження асимптотичної поведінки розв’язків матричної задачі Рімана-Гільберта як нелінійного аналогу методу стаціонарної фази для дослідження асимптотик розв’язків нелінійних інтегровних систем.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є ознайомлення майбутніх магістрів з методами дослідження нелінійних рівнянь, що базуються на варіанті методу оберненої задачі розсіяння, який має вигляд задачі аналітичної факторизації типу Рімана-Гільберта, а також з основними ідеями асимптотичного аналізу розв’язків задачі Коші для таких рівнянь.

1.3. Кількість кредитів: **6**

1.4. Загальна кількість годин: **180**

| 1.5. Характеристика навчальної дисципліни | |
|---|---|
| **за вибором** | |
| Денна форма навчання | Заочна (дистанційна) форма навчання |
| Рік підготовки | |
| **2-й** | |
| Семестр | |
| **3-й** | |
| Лекції | |
| **26 год.** | |
| Практичні, семінарські заняття | |
| **26 год.** | |
| Лабораторні заняття | |
| | |
| Самостійна робота | |
| **128 год.** | |
| у тому числі індивідуальні завдання | |
| | |

1.6. Заплановані результати навчання:
**знати:**
- властивості інтегралів типу Коші у різних випадках (біля кінців контуру інтегрування; у випадку особливостей різного типу);
- теореми про розв’язання скалярної задачі Рімана-Гільберта;
- теореми про розв’язання матричної задачі Рімана-Гільберта;
- ідеї зображення пар Лакса для нелінійних інтегровних рівнянь;

- конструкції розв’язків задач Рімана-Гільберта на системі контурів з постійними матрицями стрибка;
- ідеї використання g-функції для послідовностей трансформацій задачі Рімана-Гільберта;

**уміти:**

- конструювати задачі аналітичної факторизації, виходячи з розв’язків Йоста лінійних рівнянь відповідних пар Лакса;
- аналізувати «таблиці знаків» g-функцій та обирати послідовність трансформацій вихідної задачі Рімана-Гільберта;
- конструювати параметрикси для асимптотичного аналізу задач Рімана-Гільберта; доводити збіжність, за великим часом, розв’язків задач Рімана-Гільберта до розв’язків відповідних модельних (граничних) задач.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

**Розділ 1.** ***Теорія граничних задач Рімана-Гільберта.***

**Тема 1.** *Інтеграл типу Коші.*
Головне значення інтегралу типу Коші. Формули Сохоцького-Племеля. Властивості граничних значень інтегралу типу Коші.

**Тема 2.** *Скалярна гранична задача Рімана-Гільберта.*
Індекс задачі. Задача Рімана-Гільберта для однозв’язної області. Задача Рімана-Гільберта для багатозв’язної області

**Тема 3.** *Матрична гранична задача Рімана-Гільберта***.**
Індекс задачі. Теореми про розв’язність задачі.

**Розділ 2.** ***Теорія дослідження нелінійних рівнянь методом оберненої задачі розсіяння.***

**Тема 4.** *Інтегровні нелінійні рівняння***.**
Пара Лакса. Розв'язки Йоста лінійних рівнянь з пари Лакса. Задача розсіяння. Матриця розсіяння. Спектральні функції.

**Тема 5.** *Задача Рімана-Гільберта для інтегровних нелінійних рівнянь.*
Отримання сім’ї задач Рімана-Гільберта з задачі розсіяння. Задача Рімана-Гільберта у якості оберненої задачі для лінійних рівнянь з пари Лакса. Солітонні розв’язки як спеціальний випадок розв’язків задачі Рімана-Гільберта.

**Розділ 3.** ***Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що спадають на нескінченності.***

**Тема 6.** *Асимптотичний аналіз задачі Коші в термінах асимптотичного аналізу задачі Рімана-Гільберта.*
Таблиця знаків фазової функції. Алгебраїчні (трикутні) факторизації матриці стрибків на дійсній осі. Деформації контуру вихідної задачі Рімана-Гільберта.

**Тема 7**. *Асимптотика у секторі подібності.*
Задача Рімана-Гільберта для диференціального рівняння параболічного циліндру. Апроксимація розв’язку вихідної (деформованої) задачі Рімана-Гільберта розв’язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння параболічного циліндру. Отримання головного члена асимптотики.

**Тема 8**. *Асимптотики у перехідних зонах: зона Пенлеве.*
Задача Рімана-Гільберта для рівняння Пенлеве-II. Апроксимація розв’язку вихідної задачі розв’язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння Пенлеве-II.

**Тема 9.** *Асимптотики у перехідних зонах: зона хвиль дисперсійного шоку.*

Задача Рімана-Гільберта на двох відрізках та її розв’язок у термінах еліптичних функцій.

**Розділ 4.** ***Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що не спадають на нескінченності.***

**Тема 10.** *Задача Рімана-Гільберта для задачі Коші з початковими даними типу сходинки.*
Фонові розв'язки лінійних рівнянь з пари Лакса. Задача розсіяння та її трансформація у задачу Рімана-Гільберта.

**Тема 11.** *Секторальні асимптотики: зона Захарова-Манакова, зона плоскої хвилі, зона еліптичної хвилі.*
Деформації вихідної задачі Рімана-Гільберта. Апроксимація розв’язку вихідної задачі розв’язком задачі Рімана-Гільберта для рівняння параболічного циліндру. Розв’язок у термінах алгебраїчних функцій Задача Рімана-Гільберта на двох відрізках та її розв’язок у термінах еліптичних функцій.

## 3. Структура навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="4">Назви модулів і тем</td><td colspan="6">Кількість годин</td></tr>
<tr><td colspan="6">Денна форма</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Усього</td><td colspan="5">у тому числі</td></tr>
<tr><td>л</td><td>п</td><td>лаб</td><td>інд</td><td>ср</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="7">Розділ 1. Теорія граничних задач Рімана-Гільберта</td></tr>
<tr><td>Тема 1. Інтеграл типу Коші.</td><td>17</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>Тема 2. Скалярна гранична задача Рімана-Гільберта.</td><td>17</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>Тема 3. Матрична гранична задача Рімана-Гільберта.</td><td>17</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>Разом за розділом 1</td><td>48</td><td>9</td><td>9</td><td></td><td></td><td>33</td></tr>
<tr><td colspan="7">Розділ 2. Теорія дослідження нелінійних рівнянь методом оберненої задачі розсіяння</td></tr>
<tr><td>Тема 4. Інтегровні нелінійні рівняння.</td><td>17</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>Тема 5. Задача Рімана-Гільберта для інтегровних нелінійних рівнянь.</td><td>15</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>Разом за розділом 2</td><td>32</td><td>5</td><td>5</td><td></td><td></td><td>22</td></tr>
<tr><td colspan="7">Розділ 3. Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що спадають на нескінченності.</td></tr>
<tr><td>Тема 6. Асимптотичний аналіз задачі Коші в термінах асимптотичного аналізу задачі Рімана-Гільберта.</td><td>15</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>Тема 7. Асимптотика у секторі подібності.</td><td>15</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>Тема 8. Асимптотики у перехідних зонах: зона Пенлеве.</td><td>15</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>Тема 9. Асимптотики у перехідних зонах: зона хвиль дисперсійного шоку.</td><td>16</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td>12</td></tr>
<tr><td>Разом за розділом 3</td><td>64</td><td>8</td><td>8</td><td></td><td></td><td>45</td></tr>
<tr><td colspan="7">Розділ 4. Асимптотичний аналіз задач Коші з початковими даними, що не спадають на нескінченності.</td></tr>
<tr><td>Тема 10. Задача Рімана-Гільберта для задачі Коші з початковими даними типу</td><td>18</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td>14</td></tr>
</table>

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| сходинки. | | | | | | |
| **Тема 11.** Секторальні асимптотики: зона Захарова-Манакова, зона плоскої хвилі, зона еліптичної хвилі. | 18 | 2 | 2 | | | 14 |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| **Разом за розділом 4** | **36** | **4** | **4** | | | **28** |
| ***Усього годин*** | **180** | **26** | **26** | | | **128** |

## 4. Теми практичних занять

| № з/п | Назва теми | Кількість годин |
|---|---|---|
| 1 | Граничні значення інтегралів типу Коші | 3 |
| 2 | Скалярні граничні задачі Рімана-Гільберта для розімкнених контурів | 3 |
| 3 | Пара Лакса для лінійних рівнянь | 3 |
| 4 | Пари Лакса для нелінійних рівнянь | 3 |
| 5 | Асимптотика розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза з початковими даними, що спадають до 0. | 2 |
| 6 | Векторні та матричні формулювання задач Рімана-Гільберта для рівнянь Кортевега-де Фріза та Камаси-Хольма. | 2 |
| 7 | Асимптотика розв'язків задачі Коші на нульовому фоні для рівняння Камаси-Хольма. | 2 |
| 8 | Асимптотика розв'язків задачі Коші для нелінійного рівняння Шредінгера з початковими даними типу сходинки. | 2 |
| 9 | Контрольна робота | 2 |
| | **Разом** | **22** |

## 5. Завдання для самостійної роботи

| № з/п | Види, зміст самостійної роботи | Кількість годин |
|---|---|---|
| | Опрацювання додаткового матеріалу за відповідними темами: | |
| 1 | Скалярні задачі Рімана-Гільберта (Домашнє завдання). | 11 |
| 2 | Векторні (матричні) задачі Рімана-Гільберта. | 11 |
| 3 | Аналітичні властивості розв'язків Йоста для одновимірного рівняння Шредінгера | 11 |
| 4 | Аналітичні властивості розв'язків Йоста для системи рівнянь Дірака | 11 |
| 5 | Нулі спектральних функцій. Умови на лишки для задач Рімана-Гільберта | 11 |
| 6 | Асимптотика у секторі подібності. Задача Рімана-Гільберта для диференціального рівняння параболічного циліндру. | 11 |
| 7 | Асимптотики у перехідних зонах: зона Пенлеве. | 11 |
| 8 | Задача Рімана-Гільберта для задачі Коші з початковими даними типу сходинки (Домашнє завдання). | 11 |
| 9 | Тета-функції Рімана. Ріманові поверхні. Базис циклів. Диференціали на ріманових поверхнях. Абелеві інтеграли. | 12 |
| 10 | g-функції. Конструкції g-функцій в термінах інтегралів типу Коші | 14 |

| | | |
|---|---|---|
| | та в термінах абелєвих інтегралів. | |
| 11 | Секторальні асимптотики: зона еліптичної хвилі. | 14 |
| 12 | Задачі параметриксів (Домашнє завдання) | |
| 13 | Підготовка до заліку/екзамену | |
| | **Разом** | **128** |

## 6. Індивідуальні завдання

*Не передбачені планом*

## 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

## 8. Методи контролю

Навчання здійснюється у формі лекцій, практичних занять, а також у формі самостійної роботи (опрацювання навчального матеріалу, розв’язання учбових задач). Методи контролю: поточний (домашні завдання); контрольна робота; підсумковий семестровий екзамен.

## 8. Схема нарахування балів

| Поточний контроль та самостійна робота | | | | | | | | | | | | Всього | Екзамен | Сума |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Розділ 1** | | | **Розділ 2** | | **Розділ 3** | | | | **Розділ 4** | | Контрольна робота | | | |
| Т1 | Т2 | Т3 | Т4 | Т5 | Т6 | Т7 | Т8 | Т9 | Т10 | Т11 | 20 | 60 | 40 | 100 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | | | | |

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

## Критерії оцінювання навчальних досягнень

| Оцінка в балах | Оцінка за національною шкалою | |
|---|---|---|
| Оцінка | Пояснення | |
| 90 – 100 | Відмінно | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою. |
| 70 – 89 | Добре | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома |

| | | |
|---|---|---|
| | | значними помилками. |
| 50 –69 | Задовільно | Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками. |
| 1–49 | Незадовільно | Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки |

**Шкала оцінювання**

| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка за національною шкалою |
|---|---|
| | для чотирирівневої шкали оцінювання |
| 90 – 100 | відмінно |
| 70-89 | добре |
| 50-69 | задовільно |
| 1-49 | незадовільно |

## 10. Рекомендована література

**Основна література**

1.Trogdon T. and Olver S., Riemann-Hilbert problems, their numerical solutions, and the computation of nonlinear special functions. – SIAM, Philadelphia, 2012.

**Допоміжна література**

1. Deift P. Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach. Courant Lecture Notes in Mathematics, New York, AMS, 2000.

2. Miller P. Applied Asymptotic Analysis. Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island, AMS, 2006.

3. Clancy K., Gohberg I. Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators. Basel, Birkhauser, 1981.

**11. Інформаційні ресурси**

Wolfram Math World: http://mathworld.wolfram.com/InverseScatteringMethod.html Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Integrable_system
MathOverflow: http://mathoverflow.net/questions/6379/what-is-an-integrable-system