

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**  
Декан факультету  
математики і інформатики  
Григорій ЖОЛТКЕВИЧ  
“ 08 ” 08 2024 р.



Робоча програма навчальної дисципліни  
**Обрані розділи ріманової геометрії**

рівень вищої освіти **другий(магістерський)**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **« Математика »**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Горькавий Василь Олексійович, доктор фізико-математичних наук, доцент,  
професор кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
протокол від 26 серпня 2024 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика».

Гарант освітньої (професійної)



Вячеслав ГОРДЕВСЬКИЙ

програми

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і  
інформатики  
протокол від 27 серпня 2024 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**Обрані розділи ріманової геометрії**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **магістр** спеціальності **111 – математика** освітня програма «**Математика**»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни «*Обрані розділи ріманової геометрії*» є ознайомлення студентів з базовими конструкціями, методами і теоремами сучасної ріманової геометрії, а також із змістовними прикладами її застосування.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни «*Обрані розділи ріманової геометрії*» є ознайомлення студентів з теоретичними засадами теорій диференційних, ріманових та афінних структур на багатовимірних многовидах, а також набуття студентами навичок проведення обчислень фундаментальних об'єктів ріманової геометрії.

1.3. Кількість кредитів – **6**

1.4. Загальна кількість годин – **180**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
За вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
<b>2-й</b>	
Семестр	
<b>3-й</b>	
Лекції	
<b>26 год.</b>	
Практичні, семінарські заняття	
<b>26 год.</b>	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
<b>128 год.</b>	
Індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання. У результаті вивчення даного курсу студент повинен знати теоретичні основи і застосовувати методи аналітичної та диференціальної геометрії для розв'язування професійних задач, а саме:

**знати** базові поняття ріманової геометрії – гладкі многовиди, тензорні поля на многовидах, ріманові многовиди (довжина кривої, кут між кривими, площа області), многовиди з афінною зв'язністю (коваріантне диференціювання, паралельний перенос, геодезичні лінії), зв'язність Леві-Чівіті, ріманова кривина, кривина Річчі, скалярна кривина, експоненційне відображення, поля Якобі, а також - відповідні фундаментальні теореми ріманової геометрії (формули першої та другої варіації кривої, теорема Шура про простори постійної кривини) та їх застосування в рамках теорії відносності,

**уміти** обчислювати довжину кривої, кут між кривими, площу області на рімановому многовиді, знаходити коваріантну похідну та проводити операцію паралельного переносу на просторах з афінною зв'язністю, знаходити зв'язність Леві-Чівіті ріманового многовиду, знаходити геодезичні лінії на просторах з афінною зв'язністю та на ріманових многовидах, знаходити ріманову кривину,

кривину Річчі, скалярну кривину, секційні ривини ріманового многовиду, знаходити поля Якобі вздовж геодезичних ліній на рімановому многовиді.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

*Тема 1. Елемени теорії диференційних многовидів.* Тензори, алгебраїчні операції над тензорами. Гладкий многовид. Дотичний простір многовиду. Відображення многовидів, диференціал відображення. Тензорні поля на многовидах.

*Тема 2. Ріманові многовиди – базові конструкції.* Довжина кривої, кут між кривими, площа (об'єм) області на рімановому многовиді. Ізометричні відображення.

*Тема 3. Многовиди з афінною зв'язністю.* Коваріантне диференціювання. Паралельний перенос. Тензори кривини та скруту. Геодезичні лінії на многовиді з афінною зв'язністю.

*Тема 4. Зв'язність Леві-Чевіта.* Паралельне перенесення на рімановому многовиді.

*Тема 5. Геодезичні на рімановому многовиді.* Функціонали довжини та енергії. Формула першої варіації – геодезичні як найкоротші. Експоненціальне відображення.

*Тема 6. Повнота ріманових многовидів.* Геодезична та метрична повнота многовидів. Теорема Хопфа-Рінова.

*Тема 7. Кривина ріманових многовидів.* Тензор ріманової кривини – алгебраїчні і диференціальні властивості. Секційна кривина, кривина Річчі і скалярна кривина. Простори постійної кривини. Теорема Шура.

*Тема 8. Поля Якобі.* Друга варіація довжини та енергії геодезичної кривої. Рівняння Якобі. Спряжені точки на геодезичних.

*Тема 9. Теорема Бонне і Майерса.*

*Тема 10. Теорема Картана-Адамара.*

*Тема 11. Теорема порівняння.*

*Тема 12. Радіус ін'сктивності. Межа розділу. Теорема Клінгенберга.*

*Тема 13. Елементи загальної теорії відносності.* Псевдо-ріманові многовиди. Простори Мінковського, (анті) де Сіттера. Рівняння Ейнштейна. Простір Шварцшильда.

## 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
л		п	ла б	ін д	ср	л		п	ла б	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Тема 1. Елемени теорії диференційних многовидів	14	2	2			10						
Тема 2. Ріманові многовиди – базові конструкції	14	2	2			10						
Тема 3. Многовиди з афінною зв'язністю	14	2	2			10						
Тема 4. Зв'язність Леві-Чевіта	16	2	4			10						
Тема 5. Геодезичні на рімановому многовиді	16	2	4			10						
Тема 6. Повнота ріманових многовидів	12	2				10						
Тема 7. Кривина ріманових многовидів	16	2	4			10						
Тема 8. Поля Якобі. Спряжені точки на геодезичних	14	2	2			10						

Тема 9. Теорема Бонне і Майерса	12	2				10					
Тема 10. Теорема Кармана-Адамара.	14	4				10					
Тема 11. Теорема порівняння.	14	4				10					
Тема 12. Радіус ін'єктивності. Межа розділу. Теорема Клінгенберга.	11		2			9					
Тема 13. Елементи загальної теорії відносності.	11		2			9					
Контрольна робота	2		2								
<b>Усього годин</b>	<b>180</b>	<b>26</b>	<b>26</b>			<b>128</b>					

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Теми практичних занять	Кількість годин
1	Базові властивості диференційованих многовидів. Методи побудови диференційованих многовидів.	2
2	Розв'язання елементарних задач стосовно базових понять ріманової геометрії.	2
3	Розв'язання елементарних задач стосовно базових понять теорії многовидів з афінною зв'язністю.	2
4	Розв'язання елементарних задач стосовно зв'язності Леві-Чевіта.	4
5	Розв'язання елементарних задач стосовно геодезичних ліній в просторах з афінною зв'язністю та в ріманових просторах.	4
6	Обчислення кривин (секційної, скалярної, Річчі) ріманових просторів. Елементарні властивості просторів сталої кривини.	4
7	Знаходження полів Якобі та спряжених точок на геодезичних.	2
8	Знаходження меж розділу	2
9	Рівняння Ейнштейна. Спеціальні псевдо-ріманові простори загальної теорії відносності.	2
10	Контрольна робота.	2
	<b>Разом</b>	<b>26</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Ознайомлення з теоретичними відомостями з теорії диференційних многовидів.	10
2	Ознайомлення з теоретичними відомостями та розв'язання елементарних задач стосовно базових понять ріманової геометрії	10
3	Ознайомлення з теоретичними відомостями та розв'язання елементарних задач стосовно базових понять теорії многовидів з афінною зв'язністю.	10
4	Ознайомлення з теоретичними відомостями та розв'язання елементарних задач стосовно зв'язності Леві-Чевіта.	10
5	Ознайомлення з теоретичними відомостями та розв'язання елементарних задач стосовно геодезичних ліній в просторах з афінною зв'язністю та в ріманових просторах.	10

6	Ознайомлення з теоретичними відомостями стосовно поняття повноти ріманових многовидів.	10
7	Ознайомлення з теоретичними відомостями та розв'язання елементарних задач стосовно кривин (секційної, скалярної, Річчі) ріманових просторів.	10
8	Ознайомлення з теоретичними відомостями та розв'язання елементарних задач стосовно базових понять полів Якобі на ріманових многовидах.	10
9	Ознайомлення з теоретичними відомостями стосовно теореми Бонне та її аналогів/узагальнень в рімановій геометрії.	10
10	Ознайомлення з теоретичними відомостями стосовно теореми Картана-Адамара та її аналогів/узагальнень в рімановій геометрії.	10
11	Ознайомлення з теоретичними відомостями стосовно теорем порівняння в рімановій геометрії.	10
12	Ознайомлення з теоретичними відомостями стосовно поняття радіусу ін'єктивності ріманових многовидів.	9
13	Ознайомлення з теоретичними відомостями щодо застосування методів ріманової геометрії в спеціальній та загальній теорії відносності.	9
	Разом	<b>128</b>

#### 6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом.

#### 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

#### 8. Методи контролю

Поточне опитування, контрольна робота (1) та підсумковий контроль – екзамен.

#### 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання					Екзамен	Сума
Тема 1-4	Тема 5-9 5	Тема 10-13 1	контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом		
15	15	0 15	15	60	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

#### Критерії оцінювання

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні

		навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 –69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для чотирирівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

### 10. Рекомендована література

#### Основна література

1. Gromoll D, Klingenberg W., Meyer W., "Riemannsche Geometrie im Grossen" , Springer (1968)
2. Lee J.M. Riemannian manifolds. – Springer, 1997.
3. Dubrovin B. A, Fomenko A. T., Novikov S. P. Modern Geometry - Methods and Applications, [Graduate Texts in Mathematics](#) (GTM, volume 93), 1984
4. Shlomo Sternberg Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall, 1964

#### Допоміжна література

1. Joseph Albert Wolf Spaces of Constant Curvature, American Mathematical Soc., 2011