Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

"ЗАТВЕРДЖУЮ"

В.о. декана факультету математики і інформатики

Євген МЕНЯЙЛОВ

серпня 2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Теорія гомологій і топологічний аналіз даних

рівень вищої освіти **перший (бакалаврський)**

галузь знань **11 Математика та статистика**

спеціальність **111 Математика**

освітня програма «**Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2025 / 2026 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

26 серпня 2025 року, протокол № 10

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

Петров Євген В'ячеславович, кандидат фізико-математичних наук, доцент закладу вищої освіти кафедри фундаментальної математики

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол від 26 серпня 2025 року № 1.

В. о завідувача кафедри Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)
програми Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики
протокол від 26 серпня 2025 року № 1.

Голова науково-методичної комісії Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни **«Теорія гомологій і топологічний аналіз даних»** складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр**
спеціальність **111 - Математика**
освітня програма **«Математика»**

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни «Теорія гомологій і топологічний аналіз даних» є ознайомлення із розділами алгебраїчної топології, що присвячені гомологіям, необхідними поняттями алгебри та теорії категорій і застосуваннями гомологій та інших топологічних методів у аналізі даних.
1.2 Основними завданнями вивчення дисципліни «Теорія гомологій і топологічний аналіз даних» є оволодіння методами дослідження топологічних просторів, відображень, хмар даних за допомогою теорій гомологій та когомологій.
1.3. Кількість кредитів – **4**
1.4. Загальна кількість годин – **120**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / **за вибором**	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
4-й	
Семестр	
8-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
Індивідуальні завдання	

1.6. Перелік компетентностей, що формує дана дисципліна:
ІК01. Здатність розв’язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп’ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.
ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.
ЗК03. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.
ЗК07. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.
СК01. Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання.
СК02. Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв’язання тієї самої задачі.

СК04. Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних.
СК06. Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.
СК11. Здатність формулювати та доводити нові теоретичні твердження та досліджувати можливості їх застосування для розв'язання конкретних теоретичних та прикладних задач.

1.7. Перелік результатів навчання, що формує дана дисципліна:
ПРН05. Мати навички використання спеціалізованих програмних засобів комп'ютерної та прикладної математики і використовувати інтернет-ресурси.
ПРН15. Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур
ПРН16. Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.
ПРН20. Розв'язувати основні математичні задачі аналізу даних; застосовувати базові загальні математичні моделі для специфічних ситуацій, мати навички управління інформацією, і застосування комп'ютерних засобів статистичного аналізу даних.

1.8. Пререквізити: Вивченню даної дисципліни передують дисципліни «Лінійна алгебра», «Топологія», «Загальна алгебра».

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Елементи гомологічної алгебри та теорії категорій

Тема 1. Ланцюгові комплекси та гомологічна алгебра

Ланцюгові комплекси, їхні гомології та когомології. Числа Бетті та ейлерова характеристика. Морфізми. Індуковані гомоморфізми та алгебраїчні гомотопії. Спряжений комплекс. Підкомплекси та факторкомплекси. Точні послідовності. Довга точна послідовність пари. Леми гомологічної алгебри.

Тема 2. Основні поняття теорії категорій

Категорії. Приклади з алгебри та топології. Коваріантні та контраваріантні функтори. Приклади. Композиції та морфізми функторів. Застосування до ланцюгових комплексів та гомологій.

Розділ 2. Симпліційні та персистентні гомології

Тема 1. Симпліційні простори, комплекси та гомології

Симплекси, тріангуляції та симпліційні простори. Симпліційні підпростори та відображення. Симпліційний ланцюговий комплекс. Симпліційні гомології та когомології, їх властивості. Приклади обчислення. Барицентричні підрозділи. Абстрактний симпліційний комплекс (АСК). АСК симпліційного простору. Існування реалізацій. Побудова ланцюгового комплексу та гомологій АСК. Нерв покриття. Теорема Лере про нерв. Приклади.

Тема 2. Персистентні гомології та топологічний аналіз даних

Комплекси Чеха, Вієторіса – Ріпса, альфа-комплекс, комплекс свідка, їх властивості та застосування. Діаграми Вороного та комплекс Делоне. Одноланкова кластеризація і дендрограми. Алгоритм Mapper. Персистентні об'єкти в категоріях, морфізми та підоб'єкти. Тео-

рема про опис скінченнопредставленого персистентного простору. Персистентні гомології, діаграми персистентності та штрихкоди. Функціональна персистентність. Багатовимірна персистентність. Теореми про стабільність штрихкодів. Структура множини природних зображень та інші приклади застосування.

Розділ 3. Сингулярні та клітинні гомології

Тема 1. Сингулярні гомології

Сингулярні симплекси та ланцюговий комплекс. Сингулярні гомології та когомології. Нульова група гомологій. Зв'язок з фундаментальною групою. Теорема Хопфа. Теорема Гуревича. Приклади. Індуковані морфізми. Функтори сингулярних гомологій та когомологій. Гомотопічна інваріантність сингулярних гомологій. Відносні гомології та довга точна послідовність пари. Послідовність Маєра – Вієторіса. Приклад застосування: гомології сфер. Степінь відображення сфер.

Тема 2. Клітинні простори та клітинні гомології

Клітинний простір, приклади. Пари Борсука. Теорема про вирізання. Сингулярні гомології клітинних просторів. Гомології сфер. Ізоморфізм сингулярних і симпліціальних гомологій. Клітинні гомології. Ізоморфізм сингулярних і клітиних гомологій. Обчислення клітинних гомологій у цілих числах. Приклади. Аксіоми теорії гомологій.

Тема 3. Когомології

Приклади: когомології Чеха і де Рама. Множення і формула Кюннета. Когомології многовидів та дуальність Пуанкаре. Зв'язок з гомотопічними групами.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Елементи гомологічної алгебри та теорії категорій												
Тема 1. Ланцюгові комплекси та гомологічна алгебра	16	4*	4*			8						
Тема 2. Основні поняття теорії категорій	10	2*	2*			6						
Разом за розділом 1	26	6	6			14						
Розділ 2. Симпліційні та персистентні гомології												
Тема 1. Симпліційні простори, комплекси та гомології	14	4*	4*			6						
Тема 2. Персистентні гомології та	28	6*	8*			14						

топологічний аналіз даних												
Контрольна робота	2		2*									
Разом за розділом 2	44	10	14			20						
Розділ 3. Сингулярні та клітинні гомології												
Тема 1. Сингулярні гомології	14	6*	4*			4						
Тема 2. Клітинні простори та клі-тинні гомології	20	8*	6*			6						
Тема 3. Когомоло-гії	8	2*	2*			4						
Підготовка до екзамену	8					8						
Разом за розділом 3	50	16	12			22						
Усього годин	**120**	**32**	**32**			**56**						

***(За дистанційною формою, на платформах ZOOM та MOODLE)**

4. Теми практичних занять

№ з\п	Назва теми	Кількість годин
1	Ланцюгові комплекси та гомологічна алгебра	4
2	Основні поняття теорії категорій	2
3	Симпліційні простори, комплекси та гомології	4
4	Комплекси Чеха, Вієторіса – Ріпса, альфа, комплекс свідка	4
5	Персистентні гомології, діаграми персистентності та штрихкоди	4
6	Сингулярні гомології	4
7	Клітинні простори	2
8	Обчислення клітинних гомологій	4
9	Когомології	2
10	Контрольна робота	2
	Разом	**32**

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин	Форма контролю
	Робота над домашніми завданнями, що відповідають темам практичних занять:		
1	Ланцюгові комплекси та гомологічна алгебра	8	Перевірка домашніх завдань
2	Основні поняття теорії категорій	6	Перевірка домашніх завдань
3	Симпліційні простори, комплекси та гомології	6	Перевірка домашніх завдань
4	Комплекси Чеха, Вієторіса – Ріпса, альфа, комплекс	8	Перевірка

	свідка		домашніх завдань
5	Персистентні гомології, діаграми персистентності та штрихкоди	6	Перевірка домашніх завдань
6	Сингулярні гомології	4	Перевірка домашніх завдань
7	Клітинні простори	2	Перевірка домашніх завдань
8	Обчислення клітинних гомологій	4	Перевірка домашніх завдань
9	Когомології	4	Перевірка домашніх завдань
10	Підготовка до екзамену	8	Екзамен
	Разом	**56**	

6. Індивідуальні завдання

Немає.

7. Методи навчання

Використовуються пояснювально-ілюстративний (лекції і практичні заняття), репродуктивний (виконання домашніх завдань) і частково-пошуковий (контрольна робота, екзамен) методи. В умовах воєнного стану заняття проводяться дистанційно за допомогою платформ ZOOM та MOODLE відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна.

8. Методи контролю

Поточний контроль – перевірка виконання домашніх завдань, контрольна робота (1);
Підсумковий контроль – екзамен (письмовий).

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання									Екзамен	Сума
Розділ 1		Розділ 2		Розділ 3			Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом		
T1	T2	T1	T2	T1	T2	T3				
5	3	5	5	5	5	2	30	60	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Контрольна робота включає завдання на обчислення симпліційних гомологій за тріангуляцією, комплексів Чеха та Вієторіса – Ріпса метричних просторів, клітинних гомологій та оцінюється максимум у 30 балів. За кожне завдання нараховується 3 бали за схемою:

- 3 бали за правильно виконане завдання;
- 2 бали за виконане завдання з помилками/недоліками, що не вплинули на кінцевий результат;
- 1 бал за виконане завдання з технічними/арифметичними помилками при наявності коректної логіки виконання;
- 0 балів в інших випадках

Отримана сума балів зводиться до 15 за формулою $\frac{\text{Сума набраних балів}}{\text{Максимальна сума балів}} \cdot 30$

Критерії оцінювання екзаменаційної роботи

Оцінка в балах	Критерії оцінки	Пояснення
36-40	90-100%	Теоретичний зміст курсу засвоєно цілком, сформовано необхідні практичні навички з освоєним матеріалом, усі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконано в повному обсязі, відмінна робота без помилок або роботи з однією незначною помилкою
28-35	70-89%	Теоретичний зміст курсу засвоєно цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовано, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконано, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконано з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією-двома значними помилками
20-27	50-69%	Теоретичний зміст курсу засвоєно неповністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовано, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань містять помилки, робота з трьома значними помилками
0-19	0-49%	Теоретичний зміст курсу не засвоєно, необхідні практичні навички роботи з навчальним матеріалом не сформовано, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткову самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значного підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для чотирирівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

10. Рекомендована література

Базова література

1. О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. – Харків: Основа, 1995.
2. Є.В. Петров. Топологія. Базовий курс. Навчальний посібник. – Харків: Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2025.
3. A. Hatcher. Algebraic Topology. – Cambridge University Press, 2001.
4. G. Carlsson. Topology and Data. Bull. Am. Math. Soc., Vol. 46 (2009), no. 2, p. 255–308.
5. О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. Теорія груп: навчальний посібник. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2005.

Допоміжна література

1. C. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. – Cambridge University Press, 1980.
2. T. Leinster. Basic Category Theory. – Cambridge University Press, 2014.
3. G. Carlsson. Topological Pattern Recognition for Point Cloud Data. Acta Numerica, Vol. 23 (2014), p. 289–368.
4. G. Carlsson, M. Vejdemo-Johansson. Topological Data Analysis with Applications. – Cambridge University Press, 2022.
5. E.H. Spanier. Algebraic Topology. – Springer, 1994.
6. J.W. Vick. Homology Theory. An Introduction to Algebraic Topology. Second Edition. – Springer, 2012.
7. S. Eilenberg, N.E. Steenrod. Foundations of Algebraic Topology. Princeton University Press, 1952.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. www-library.univer.kharkov.ua
2. https://moodle.karazin.ua/course/view.php?id=15055
3. https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf
4. https://arxiv.org/pdf/1612.09375
5. https://www.ams.org/journals/bull/2009-46-02/S0273-0979-09-01249-X/S0273-0979-09-01249-X.pdf