

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра фундаментальної математики

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**  
Декан факультету  
математики і інформатики  
Григорій ЖОЛТКЕВИЧ  
“ 08 ” 08 2024 р.



## РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### Рівняння з частинними похідними

рівень вищої освіти **другий(магістерський)**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Фастовська Тамара Борисівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної математики**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
Протокол від 26 серпня 2024 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми



Вячеслав ГОРДЕВСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (наукової) програми «Математика»

Гарант освітньої (наукової)  
програми



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики  
Протокол від 27 серпня 2024 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Рівняння з частинними похідними I-” складена відповідно до освітньо-професійної та освітньо-наукової програм підготовки магістр спеціальності 111 Математика освітня програма «Математика»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є навчання майбутніх магістрів основам теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та її застосування до дослідження загальних еліптичних, параболічних та гіперболічних лінійних та деяких нелінійних диференціальних рівнянь.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є ознайомлення майбутніх магістрів з основними методами дослідження загальних лінійних та деяких нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1.3. Кількість кредитів – 6

1.4. Загальна кількість годин – 180

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Обов'язкова	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
<b>1-й</b>	
Семестр	
<b>1-й</b>	
Лекції	
<b>32 год.</b>	
Практичні, семінарські заняття	
<b>32 год.</b>	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
<b>116</b>	
у тому числі індивідуальні завдання розрахунково-графічна робота (1)	

1.6. Заплановані результати навчання

#### Знати:

- основні типи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- теорію просторів Соболева;
- методи теоретичного вивчення проблеми існування слабких розв'язків еліптичних, параболічних та гіперболічних рівнянь;
- методи дослідження регулярності слабких розв'язків
- метод компактності для дослідження існування розв'язків нелінійних рівнянь з частинними похідними.

#### Уміти:

- застосовувати теорію просторів Соболева для дослідження загальних еліптичних, параболічних та гіперболічних рівнянь другого порядку;

- використовувати сучасні методи вивчення проблеми існування розв'язків рівнянь з частинними похідними, що виникають у природознавстві;
- застосовувати методи побудови наближених розв'язків до задач еліптичного, параболічного та гіперболічного типів.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### *Розділ 1. Простори Соболева-Слободецького.*

#### *Тема 1. Простори Соболева-Слободецького цілого порядку.*

Означення та властивості основних та узагальнених функцій. Регуляризації.

Означення просторів Соболева-Слободецького  $W^{k,p}(U)$  та їх елементарні властивості. Апроксимація гладкими функціями. Теорема про продовження. Теорема про слід.

#### *Тема 2. Нерівності Соболева.*

Нерівність Гальярдо-Ніренберга-Соболева. Нерівність Моррі. Загальні нерівності Соболева.

#### *Тема 3. Компактність.*

Теорема вкладення. Теорема Релліха-Кондрашова. Нерівності Пуанкаре.

#### *Тема 4. Інші види соболевських просторів.*

Перетворення Фур'є та його властивості. Застосування до означення просторів Соболева у всьому просторі. Еквівалентні норми. Простори Соболева нецілих та від'ємних порядків в обмеженій області. Означення просторів Соболева, що залежать від часу, теореми про компактність.

### *Розділ 2. Теорія лінійних еліптичних рівнянь з частинними похідними другого порядку*

#### *Тема 1. Рівномірні еліптичні рівняння.*

Поняття слабого розв'язку. Теорема Лакса-Мільграма.

#### *Тема 2. Енергетичні оцінки.*

Теорема існування слабких розв'язків еліптичних рівнянь.

#### *Тема 3. Регулярність слабких розв'язків.*

Внутрішня регулярність. Внутрішня регулярність високого порядку. Регулярність до границі. Регулярність до границі високого порядку.

#### *Тема 4. Симетричні еліптичні оператори.*

Узагальнені власні значення та функції симетричних еліптичних операторів. Теорема Стеклова.

### *Розділ 3. Теорія параболічних рівнянь.*

#### *Тема 1. Гальоркінські апроксимації.*

Поняття слабого розв'язку параболічного рівняння. Гальоркінські апроксимації. Конструкція наближених розв'язків. Енергетичні оцінки. Теорема існування слабого розв'язку. Єдиність слабого розв'язку.

#### *Тема 2. Регулярність слабких розв'язків.*

Формальні оцінки. Теорема про поліпшену регулярність. Регулярність високого порядку.

### *Розділ 4. Теорія гіперболічних рівнянь*

#### *Тема 1. Гальоркінські апроксимації.*

Поняття слабкого розв'язку гіперболічного рівняння. Конструкція наближених розв'язків. Енергетичні оцінки. Теорема існування слабкого розв'язку. Єдиність слабкого розв'язку.

*Тема 2. Регулярність слабких розв'язків.*

Теорема про поліпшену регулярність. Регулярність високого порядку.

*Розділ 5. Метод компактності.*

Метод компактності на прикладі рівняння нелінійних коливань пластини в надзвуковому потоці газу.

### 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усьог о	у тому числі					усьог о	у тому числі				
л		п	лаб	інд.	с. р.	л		п	лаб	інд.	с. р.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Простори Соболева-Слободецького</b>												
Тема 1. Простори Соболева- Слободецького цілого порядку.	9	2*	2*			5						
Тема 2. Нерівності Соболева.	9	2*	2*			5						
Тема 3. Компактність.	9	2*	2*			5						
Тема 4. Інші види соболевських просторів.	13	2*	2*			9						
Разом за розділом 1	40	8*	8*			24						
<b>Розділ 2. Теорія лінійних еліптичних рівнянь з частинними похідними другого порядку</b>												
Тема 1. Рівномірні еліптичні рівняння.	9	2*	2*			5						
Тема 2. Енергетичні оцінки.	9	2*	2*			5						
Тема 3. Регулярність слабких розв'язків.	13	2*	2*			9						

Тема 4. Симетричні еліптичні оператори.	9	2*	2*			5						
Разом за розділом 2	40	8*	8*			24						
<b>Розділ 3. Теорія параболічних рівнянь.</b>												
Тема 1. Гальоркінські апроксимації.	14	2*	2*			10						
Тема 2. Регулярність слабких розв'язків.	16	2*	2*			12						
Разом за розділом 3	30	4*	4*			22						
<b>Розділ 4. Теорія гіперболічних рівнянь.</b>												
Тема 1. Гальоркінські апроксимації.	14	2*	2*			10						
Тема 2. Регулярність слабких розв'язків.	22	4*	4*			14						
Усього за розділом 4	36	6*	6*			24						
<b>Розділ 5. Метод компактності.</b>												

	34	6*	6*		22						
	34	6*	6*		22						
	<b>180</b>	<b>32</b> *	<b>32</b> *		<b>116</b>						

)\* Викладаються дистанційно, на платформі ZOOM

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Означення просторів Соболева $W^{k,p}(U)$ та їх елементарні властивості.	2
2	Нерівності Соболева. Нерівність Гальярдо-Ніренберга-Соболева. Нерівність Моррі	2
3	Компактність. Теореми вкладення.	2
4	Простори Соболева нецілих та від'ємних порядків. Простори Соболева, що залежать від часу.	2
5	Слабкі формулювання крайових задач для еліптичних рівнянь.	2
6	Застосування теореми Лакса-Мільграма.	2
7	Регулярність слабких розв'язків.	2
8	Задача на власні значення для еліптичних операторів.	2
9	Застосування метода Гальоркіна до параболічних рівнянь.	2
10	Регулярність слабких розв'язків параболічних рівнянь.	2
11	Застосування метода Гальоркіна до хвильового рівняння.	2
12	Регулярність слабких розв'язків гіперболічних рівнянь	2
13	Метод компактності	4
14	Контрольна робота.	4
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання додаткового матеріалу за відповідними темами:	
1	Означення просторів Соболева $W^{k,p}(U)$ та їх елементарні властивості.	5
2	Нерівності Соболева. Нерівність Гальярдо-Ніренберга-Соболева. Нерівність Моррі	5
3	Компактність. Теореми вкладення.	5
4	Перетворення Фур'є та його властивості. Застосування до означення просторів Соболева у всьому просторі. Еквівалентні норми. Простори Соболева нецілих та від'ємних порядків в обмеженій області. Простори Соболева, що залежать від часу.	5
5	Слабкі формулювання крайових задач для еліптичних рівнянь. Теорема Лакса-Мільграма.	5
6	Теореми існування слабких розв'язків еліптичних рівнянь.	5
7	Регулярність слабких розв'язків.	9
8	Задача на власні значення для еліптичних операторів.	5
9	Застосування метода Гальоркіна до рівняння Пуассона. Метод компактності.	10
10	Регулярність слабких розв'язків параболічних рівнянь.	10
11	Застосування метода Гальоркіна до хвильового рівняння. Метод компактності.	10
12	Регулярність слабких розв'язків гіперболічних рівнянь.	10
13	Метод компактності.	10



14	Виконання розрахунково-графічної роботи	10
15	Підготовка до екзамену.	12
	<b>Разом</b>	<b>116</b>

### 6. Індивідуальні завдання

Розрахунково-графічна робота (1)

### 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна).

### 8. Методи контролю

- контрольна робота (1), розрахунково-графічна робота (1);
- екзамен.

### 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання																
Розділ 1				Розділ 2				Розділ 3		Розділ 4		Розділ 5	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Розрахунково-графічна робота передбачена навчальним планом	Екзамен	Сума
T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T1	T2	T1				
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	20	20	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

### Критерії оцінювання

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.

70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 –69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
	для екзамену
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. Evans L.C. Partial Differential Equations (2<sup>nd</sup> ed.), American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.

### Допоміжна література

1. Gilbard D., Trudinger N., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (2<sup>nd</sup> ed.), Springer, 1983.
2. J. L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

## 11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. [www-library.univer.kharkov.ua](http://www-library.univer.kharkov.ua)
2. <http://puremath.univer.kharkov.ua/~Fastovskaya>

- i. 3. Wolfram Math World:  
<http://mathworld.wolfram.com/topics/PartialDifferentialEquations.html>
4. Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Differential\\_equation#Partial\\_differential\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation#Partial_differential_equations)
5. MathOverflow: <http://mathoverflow.net/questions/tagged/differential-equations>