

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Кафедра фундаментальної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ



“ 08 ” 2024 р.

Робоча програма навчальної дисципліни
математичний аналіз

рівень вищої освіти - бакалавр

галузь знань **01 Освіта/Педагогіка**

спеціальність **014.04 Середня освіта (Математика)**

освітньо-професійна програма **«Математика та інформатика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:

**Доцент кафедри фундаментальної математики, кандидат фізико-математичних наук,
доцент Гефтер Сергій Леонідович**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол від 26 серпня 2024 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми «Математика та інформатика»

Гарант освітньо-професійної програми



Ганна ЧЕРНОВА

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики протокол від 27 серпня 2024 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**математичний аналіз**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр** спеціальності **014.04 Середня освіта (Математика)** освітня програма «**Математика та інформатика**»

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “математичний аналіз” є надання майбутнім фахівцям знань у галузі сучасного математичного аналізу.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам математичного аналізу та застосуванню цих методів у інших математичних дисциплінах.

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу, володіння культурою мислення.

ЗК04 Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями, використовувати знання про сучасну природничу картину світу в освітній та професійній діяльності, застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК07. Здатність використовувати основні методи, способи та засоби одержання, зберігання, переробки інформації.

ЗК08. Здатність працювати з комп'ютером як засобом управління інформацією.

ФК08. Володіння основними положеннями класичних розділів математики, її базовими ідеями та методами.

ФК09. Здатність здійснювати логічний аналіз математичних об'єктів і процедур та конкретизацію абстрактних математичних знань у процесі вивчення математики.

ФК10. Володіння культурами математичного мислення, логічною, алгоритмічною та евристичною; розуміння загальної структури математичного знання, взаємозв'язку між різними математичними дисциплінами; здатність користуватися мовою математики, коректно виражати та аргументовано обґрунтовувати наявні знання.

ФК11. Здатність будувати математичні моделі для вирішення практичних проблем; розуміння критеріїв якості математичного моделювання.

ФК13. Здатність застосовувати різні сценарії вивчення конкретного математичного матеріалу, накопичувати та систематизувати різні варіанти доказів теорем, розв'язків задач, банків ключових задач тощо.

ФК14. Володіння основними положеннями історії розвитку математики, еволюції математичних ідей та основними концепціями сучасної математичної науки.

1.3. Кількість кредитів – **10**

1.4. Загальна кількість годин – **300**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Обов'язкова	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
1-й	
Семестр	
1, 2-й	
Лекції	
64 год.	
Практичні, семінарські заняття	
96 год.	

Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
140 год.	

1.6. Програмні результати навчання за ОПП:

ПРН04. Знати базові поняття та теореми математичного, функціонального, комплексного аналізу, ряди, диференціювання та інтегрування функцій, інтегрування на поверхнях, термінологію теорії міри, інтегрування за Лебегом, нескінченновимірні метричні простори (банахові, гільбертові, тощо), функції комплексної змінної. Уміти досліджувати аналітичні об'єкти та використовувати їх у теоретичних та практичних задачах. Володіти методами математичного, функціонального аналізу, теорії функцій, методами математичних міркувань.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Дійсні числа та відображення

Тема 1. Основні поняття про дійсні числа та відображення

1. Раціональні числа та їх зображення на числовій прямій. Означення ірраціонального числа. Дійсні числа та їх зображення за допомогою нескінченних десятковими дробами.
2. Модуль дійсного числа та його властивості. Зв'язок з віддаллю на прямій.
3. Квантори загальності та існування.
4. Поняття функції. Сюр'єктивні, ін'єктивні та бієктивні відображення. Приклади.
5. Складна функція. Обернена функція. Приклади.
6. Графік функції. Графік числової функції. Графік оберненої функції. Приклади.
7. Функції, обернені до тригонометричних функцій.
8. Ціла і дробова частини дійсного числа. Функції $y = [x]$, $y = \{x\}$.
9. Поняття елементарної функції. Приклади.

Тема 2. Елементарні функції та їх властивості

1. Квадратична функція. Вилучення повного квадрату. Побудова графіка квадратичної функції за допомогою паралельного перенесення та перетворення подібності.
2. Степенева функція. Значення степеневі функції, якщо показник є цілим додатним числом, цілим від'ємним числом, раціональним числом.
3. Показникова функція та її властивості.
4. Логарифмічна функція та її властивості. Графік логарифмічної функції.

Розділ 2. Границя числової послідовності та функції

Тема 1. Границя числової послідовності

1. Окіл точки на числовій прямій. Означення числової послідовності. Означення границі числової послідовності (випадок скінченної границі). Приклади.
2. Основні теореми про границі числових послідовностей: єдиність границі; границя модулів елементів збіжної послідовності; обмеженість збіжної послідовності; властивість відмежування від нуля.
3. Нескінченно малі послідовності та їх властивості.

4. Арифметичні дії над збіжними послідовностями.
5. Нескінченно великі послідовності та їх зв'язок з нескінченно малими послідовностями.
6. Невласні елементи числової прямої та їх околиці. Загальне означення границі числової послідовності.
9. Монотонні послідовності. Теорема Вейерштрасса.
10. Число e .

Тема 2. Границя числової функції однієї змінної

1. Означення границі функції в точці по Коші.
2. Загальне означення границі функції в точці на мові околів (випадки скінченних та нескінченних границь).
3. Основні теореми про границі функції: єдиність границі; границя модуля функції; обмеженість функції, яка має скінченну границю; властивість відмежування від нуля.
4. Нескінченно малі функції та їх властивості.
5. Нескінченно великі функції та їх зв'язок з нескінченно малими функціями.
6. Перша чудова границя.
7. Еквівалентні функції. Теорема про заміну функцій на еквівалентні при обчислюванні границь.
8. Символ Ландау O та його властивості.
9. Критерій еквівалентності функцій.
10. Друга чудова границя.
11. Найважливіші границі аналізу.
12. Означення неперервності функції в точці. Геометричний зміст неперервності.
13. Монотонні функції. Теорема Вейерштрасса.
14. Критерій Коші існування скінченної границі у функції.

Розділ 3. Диференціальне числення функцій однієї змінної

1. Означення похідної. Фізичний зміст похідної. Зв'язок з неперервністю.
2. Геометричний зміст похідної.
3. Означення диференціала функції в точці. Геометричний зміст диференціала.
4. Арифметичні дії над функціями, які мають скінченну похідну.
5. Похідна оберненої функції.
6. Таблиця похідних основних елементарних функцій.
7. Похідна складної функції.

Розділ 4. Неперервність функції однієї змінної

Тема 1. Глобальні властивості неперервних функцій.

1. Перша та друга теореми Больцано-Коші.
2. Точки розриву монотонної функції.
3. Теорема про існування та неперервність оберненої функції.
4. Неперервність елементарних функцій.
5. Перша та друга теореми Вейерштрасса.

Розділ 5. Застосування диференціального числення функцій однієї змінної.

Тема 1. Похідні та диференціали вищих порядків.

1. Інваріантність форми першого диференціала.
2. Диференціал як джерело наближених формул.
3. Похідні вищих порядків.
4. Формули для n -ої похідної.
5. Формула Лейбніца.
6. Диференціали вищих порядків.
7. Порухення інваріантності форми другого диференціала.

Тема 2. Дослідження функцій за допомогою диференціального числення

1. Основні теореми диференціального числення: лема про точку зростання (спадання) функції, теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа та наслідки із неї, теорема Коші.
2. Параметрично визначені криві. Теорема про їх диференційованість. Приклади. Циклоїда. Гиперболичні функції та їх похідні.
3. Перше та друге правила Лопітала. Приклади.
4. Формула Тейлора для полінома.
5. Формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано для довільної функції.
6. Залишковий член у формулі Тейлора у формі Лагранжа.
7. Розкладність елементарних функцій за формулою Маклорена:
8. Умова сталості функції.
9. Умова монотонності функції.
10. Означення локального та абсолютного екстремумів. Необхідна умова локального екстремуму.
11. Достатня умова локального екстремуму у термінах першої похідної. Приклади дослідження функцій на локальний та абсолютний екстремуми.
12. Достатня умова локального екстремуму у термінах другої похідної.
13. Означення опуклої та угнутої функції.
14. Умови опуклості функції у термінах першої та другої похідної.
15. Точки перегину. Необхідні та достатні умови точок перегину.
16. Асимптоти графіка функції.
17. Загальна схема побудови графіка функції. Приклади.

Розділ 6. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Тема 1. Невизначений інтеграл

1. Означення первісної та невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів.
2. Лінійність невизначеного інтеграла.
3. Інтегрування за допомогою підстановки.
4. Інтегрування частинами.
5. Постановка задачі про інтегрування у скінченному вигляді.
6. Інтегрування раціональних функцій. Метод Остроградського.
7. Інтегрування ірраціональних функцій. Підстановки Ейлера.

Тема 2. Визначений інтеграл Рімана та його застосування

1. Зв'язок первісної з площею криволінійної трапеції.
2. Задача про обчислювання площі криволінійної трапеції.

3. Означення визначеного інтеграла Рімана. Необхідна умова інтегровності за Ріманом.
4. Коливання функції на множині.
5. Верхні та нижні інтегральні суми Дарбу. Зв'язок з інтегральними сумами Рімана.
6. Властивості верхніх та нижніх інтегральних сум Дарбу.
7. Означення верхнього та нижнього інтегралів Дарбу. Зв'язок між ними.
8. Верхній та нижній інтеграл Дарбу як границі відповідних сум Дарбу.
9. Критерій Дарбу інтегровності функції за Ріманом.
10. Критерій Рімана.
11. Критерій інтегровності функції за Ріманом у термінах коливань функції.
12. Класи інтегровних за Ріманом функцій: неперервні функції, функції зі скінченною множиною точок розриву, монотонні функції.
13. Властивості інтегровних за Ріманом функцій.
14. Лінійність інтеграла Рімана.
15. Адитивність інтеграла Рімана відносно відрізка інтегрування.
16. Монотонність інтеграла Рімана.
17. Оцінки для інтеграла Рімана.
11. Теорема про середнє значення для інтеграла Рімана.
12. Властивості визначеного інтеграла Рімана зі змінною верхньою межею.
13. Існування первісної для неперервної функції.
14. Формула Ньютона- Лейбніца.
15. Інтегрування частинами для визначеного інтеграла Рімана.
16. Заміна змінної для визначеного інтеграла Рімана.
17. Означення довжини кривої та її властивості.
18. Площа криволінійної трапеції. Площа криволінійного сектора.

Тема 3. Невласні інтеграли

1. Означення невластних інтегралів першого та другого роду. Геометричний зміст. Лінійність невластних інтегралів. Приклади.
2. Формула Ньютона- Лейбніца для невластних інтегралів. Інтегрування частинами для невластних інтегралів.
3. Абсолютно та умовно збіжні невластні інтеграли.
4. Критерій збіжності невластних інтегралів. від невід'ємних функцій. Наслідок.
5. Ознаки порівняння для невластних інтегралів від невід'ємних функцій.
6. Ознаки порівняння у граничній формі для невластних інтегралів першого роду від невід'ємних функцій. Приклади.
7. Невласні інтеграли з декількома особливостями. Приклади.
8. Гамма-функція Ейлера.
9. Бета-функція Ейлера.
10. Інтеграл Ейлера-Пуассона.
11. Головне значення невластного інтеграла. Приклади.

Розділ 7. Числові ряди

Тема 1. Властивості числових рядів

1. Означення числового ряду. Часткові суми числового ряду. Поняття збіжності. Зв'язок числових рядів з числовими послідовностями. Приклади.
2. Необхідна ознака збіжності числового ряду.
3. Залишок числового ряду. Лінійні операції над збіжними рядами.
4. Критерій Коші збіжності числового ряду. Абсолютно та умовно збіжні числові ряди

5. Зв'язок числових рядів з невід'ємними інтегралами.
6. Критерій збіжності рядів з невід'ємними елементами.
7. Інтегральна ознака Коші збіжності числового ряду.
8. Ознака порівняння для рядів з невід'ємними елементами.
9. Ознаки порівняння у граничній формі для рядів з невід'ємними елементами.
10. Ознака Даламбера. Гранична форма. Приклади.
11. Радикальна ознака Коші. Гранична форма. Приклади.
12. Ознаки Даламбера та Коші для рядів з довільними елементами.
13. Знакопереміжні ряди. Ознака Лейбніца. Оцінка залишку ряду Лейбніца.
14. Властивість переставності абсолютно збіжних рядів. Порушення властивості переставності умовно збіжними рядами. Теорема Рімана.

3. Структура навчальної дисципліни

І семестр

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
л		п	лаб.	інд.	с. р.	л		п	лаб.	інд.	с. р.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Дійсні числа та відображення												
Тема 1. Основні поняття про дійсні числа та відображення	12	6	2	--	--	6						
Тема 2. Елементарні функції та їх властивості	28	--	12	--	--	14						
Разом за розділом 1	40	6	14			20						
Розділ 2. Границя числової послідовності та функції												
Тема 1. Границя числової послідовності	36	6	14	--	--	16						
Тема 2. Границя числової функції однієї змінної	36	8	14	--	--	14						
Разом за розділом 2	72	14	28			30						

Розділ 3. Диференціальне числення функції однієї змінної												
Разом за розділом 3	68	12	22			34						
Разом за I семестр	180	32	64			84						

II семестр

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 4. Неперервність функції однієї змінної												
Тема 1. Глобальні властивості неперервних функцій	14	2	2			10						
Всього за розділом 4	14	2	2			10						
Розділ 5. Застосування диференціального числення функцій однієї змінної												
Тема 1. Похідні та диференціали вищих порядків	17	4	4			9						
Тема 2. Дослідження функцій за допомогою диференціального числення	19	6	6			7						
Всього за розділом 5	36	10	10			16						
Розділ 6. Інтегральне числення функцій однієї змінної												
Тема 1. Невизначений інтеграл	17	6	6			5						
Тема 2. Визначений інтеграл Рімана та його застосування	13	4	4			5						
Тема 3. Невласні інтеграли	22	6	6			10						
Всього за розділом 6	52	16	16			20						

Розділ 7. Числові ряди											
Тема 1. Властивості числових рядів	18	4	4			10					
Всього за розділом 7	18	4	4			10					
Всього за II семестр	120	32	32			56					

4. Теми практичних занять

І семестр

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Функції та їх графіки, обернені функції	6
2	Елементарні функції, перетворення графіків	6
3	Деякі неелементарні функції та її властивості	4
4	Границя числової послідовності, невизначеності	8
5	Шкала зростання послідовностей	6
6	Границя числової функції однієї змінної	10
7	Еквівалентні функції, таблиця еквівалентностей	6
8	Контрольна робота	2
9	Неперервність в точці, типи розривів	6
10	Обчислення похідних, таблиця та правила	8
11	Контрольна робота (2)	2
	Всього за I семестр	64

II семестр

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Неперервність функції однієї змінної	2
2	Похідні та диференціали вищих порядків	4
3	Дослідження функцій за допомогою диференціального числення	6
4	Невизначений інтеграл	4
5	Визначений інтеграл Рімана та його застосування	4
6	Невласні інтеграли	6
7	Властивості числових рядів	4
8	Контрольна робота	2
	Всього за II семестр	32

5. Завдання для самостійної роботи

I семестр

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Основні поняття про дійсні числа та відображення [5]: 3.5, 3.9, 3.12.	14
2	Елементарні функції та їх властивості [5]: 7.2, 7.3, 7.5, 7.15.	14
3	Границя числової послідовності [5]: 8.11, 8.23, 8.29, 8.46.	12
4	Границя числової функцій однієї змінної [5]: 9.23, 9.26, 9.28, 9.46.	12
5	Неперервність та типи розривів [5]: 10.33, 10.53, 10.64, 10.77.	12
6	Похідна та диференціал [5]: 13.137, 13.171, 13.214, 13.217.	20
	Всього за I семестр	84

II семестр

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Робота над домашніми завданнями, що відповідають темам практичних занять	24
2	Розв'язання задач з індивідуального домашнього завдання	6
3	Підготовка до контрольної роботи	6
4	Опрацювання додаткового матеріалу за відповідними темами	8
5	Підготовка до складання семестрового контролю	12
	Всього за II семестр	56

6. Індивідуальні завдання

Розрахунково-графічні роботи - 1.

7. Методи навчання

Форми навчання: лекції (розкриваються принципові та найбільш важливі аспекти визначених тем) із застосуванням мультимедійних засобів навчання; практичні заняття з елементами теоретичних питань (розповідь-пояснення, бесіда, ілюстрація, демонстрація, вправи).

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину або військового стану, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна.

8. Методи контролю

Контрольні роботи; Розрахунково-графічні роботи;

Колоквіуми; Екзамени.

9. Схема нарахування балів

I семестр

Контрольна робота 1	Контрольна робота 2	Екзамен	Сума
Розділ 1, 2, Тема 1, 2	Розділ 3	Розділ 1, 2, 3 Тема 1, 2	
30	30	40	100

II семестр

№ з/п	Поточний контроль та самостійна робота	Назва розділів і теми	Бали
1	Контрольна робота	Розділ 6-й; Теми 1-3.	20
2	Розрахунково-графічна робота	Розділ 5-й; Тема 2-3.	20
3	Колоквіум	Розділ 4-й; Розділ 5-й.	20
4	Екзамен	Розділ 4-й; Розділ 6-й; Розділ 5-й; Розділ 7-й.	40
	Всього		100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.

50 –69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки.

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для чотирирівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

10. Рекомендована література

Основна література

Основна література

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, ч. I, II. – К.; Либідь, 1994.
2. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І., Математичний аналіз, Львів, нац. ун-т ім. І. Франка, 2012.
3. Давидов М. О., Курс математичного аналізу, ч. 1, К.: Вища школа, 1990.
4. Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін., Математичний аналіз у задачах і прикладах — К.: Вища шк., 2002.-- ч. 1, 2.

Допоміжна література

1. Гришко О. Ю., Нагнибіда М. І., Настасієв П. П. Теорія функцій комплексної змінної: Розв'язування задач. – К.: Вища школа, 1994.
2. Kolmogorov A. N. and Fomin S. V., Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Martino Fine Books (May 8, 2012).

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. www-library.univer.kharkov.ua
2. <http://mathworld.wolfram.com/topics.html>
3. <http://puremath.univer.kharkov.ua/~gefter/documents>