Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

В.о. декана факультету математики і інформатики

Євген МЕНЯЙЛОВ

“28” серпня 2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Основи алгебраїчної топології

рівень вищої освіти **перший (бакалаврський)**

галузь знань **11 Математика та статистика**

спеціальність **111 Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2025 / 2026 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

26 серпня 2025 року, протокол № 10

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

Петров Євген В'ячеславович, кандидат фізико-математичних наук, доцент закладу вищої освіти кафедри фундаментальної математики

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол від 26 серпня 2025 року № 1.

В. о завідувача кафедри Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)
програми Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики
протокол від 26 серпня 2025 року № 1.

Голова науково-методичної комісії Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни **“Основи алгебраїчної топології”** складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр**
спеціальність **111 - Математика**
освітня програма **«Математика»**

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Основи алгебраїчної топології” є ознайомлення з базовими конструкціями та інваріантами алгебраїчної топології.
1.2 Основними завданнями вивчення дисципліни “Основи алгебраїчної топології” є оволодіння методами дослідження топологічних просторів та відображень за допомогою алгебраїчних інваріантів.
1.3. Кількість кредитів – **3**
1.4. Загальна кількість годин – **90**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / **за вибором**	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
2-й	
Семестр	
4-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
16 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
42 год.	
Індивідуальні завдання	

1.6. Перелік компетентностей, що формує дана дисципліна:
ІК01. Здатність розв’язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп’ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.
ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
ЗК03. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.
ЗК07. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.
ФК01. Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання.
ФК02. Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв’язання тієї самої задачі.
ФК04. Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних.
ФК11. Здатність формулювати та доводити нові теоретичні твердження та досліджувати можливості їх застосування для розв’язання конкретних теоретичних та прикладних задач.

1.7. Перелік результатів навчання, що формує дана дисципліна:
РН04. Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.
РН15. Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур
РН16. Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.

1.8. Пререквізити: Вивченню даної дисципліни передують дисципліни «Елементи алгебри та теорії чисел», «Лінійна алгебра» і «Топологія».

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Гомотопії та фундаментальна група

Тема 1. Гомотопії

Метрики та топології на просторі відображень. Гомотопія відображень. Зв'язана гомотопія. Основні властивості, приклади. Гомотопічна еквівалентність, приклади. Ретракт, деформаційний ретракт. Стяжні простори. Приклади.

Тема 2. Поняття фундаментальної групи

Гомотопія шляхів і гомотопічні властивості добутку шляхів. Необхідні відомості з теорії груп. Замкнені шляхи (петлі). Фундаментальна група. Ізоморфність у різних точках. Індукований гомоморфізм і його властивості. Гомотопічна інваріантність. Фундаментальна група добутку. Однозв'язні простори. Приклади. Теорема Зейферта – ван Кампена. Застосування: фундаментальні групи компактних зв'язних поверхонь.

Розділ 2. Накриття і обчислення фундаментальних груп

Тема 1. Обчислення фундаментальних груп за допомогою накрить

Накриття. Універсальне накриття. Накриття простору орбіт дії групи на топологічному просторі. Приклади. Підняття шляху. Накриваюча гомотопія. Теорема про обчислення фундаментальної групи за допомогою накриття. Група монодромії. Приклади: фундаментальні групи торів, проєктивних та лінзових просторів, букетів кіл тощо.

Тема 2. Загальна теорія накрить

Підняття відображень у накриваючий простір. Морфізми накрить. Ізоморфні накриття. Накриття з відміченими точками. Автоморфізми накрить і регулярні накриття. Напівлокальна і локальна однозв'язність. Існування та єдиність накрить. Група накриття. Накриття і фундаментальні групи многовидів.

Розділ 3. Гомотопічні групи та їхні застосування

Тема 1. Вищі гомотопічні групи

Сфероїди. Гомотопічні групи. Абелевість. Ізоморфність у різних точках. Індукований гомоморфізм і його властивості. Гомотопічна інваріантність. Гомотопічні групи добут-

ку. Асферичні простори. Приклади. Гомотопічні групи і накриття. Приклади. Надбудови. Теорема Фрейденталя. Гомотопічні групи сфер. Розшарування. Точні послідовності. Точна гомотопічна послідовність розшарування та приклади обчислення гомотопічних груп за її допомогою.

Тема 2. Застосування фундаментальної та вищих гомотопічних груп

Застосування гомотопічних груп як інваріантів. Теореми про барабан і Брауера. Теорема Борсука – Уляма та її наслідки. Степінь відображення сфер та її застосування: теорема про причісування їжака. Клітинні простори та їхні гомотопічні групи.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Гомотопії та фундаментальна група												
Тема 1. Гомотопії	12	4*	2*			6						
Тема 2. Поняття фундаментальної групи	18	8*	4*			6						
Разом за розділом 1	30	12	6			12						
Розділ 2. Накриття і обчислення фундаментальних груп												
Тема 1. Обчислення фундаментальних груп за допомогою накрить	12	4*	2*			6						
Тема 2. Загальна теорія накрить	14	6*	2*			6						
Контрольна робота	2		2*									
Разом за розділом 2	28	10	6			12						
Розділ 3. Гомотопічні групи та їхні застосування												
Тема 1. Вищі гомотопічні групи	12	4*	2*			6						
Тема 2. Застосування фундаментальної та вищих гомотопічних груп	14	6*	2*			6						
Підготовка до заліку	6					6						
Разом за розділом 3	32	10	4			18						
Усього годин	**90**	**32**	**16**			**42**						

***(За дистанційною формою, на платформах ZOOM та MOODLE)**

4. Теми практичних занять

№ з\п	Назва теми	Кількість годин
1	Гомотопії, гомотопічні еквівалентності, ретракції, стяжність	2
2	Фундаментальна група, індуковані гомоморфізми, однозв'язність	2
3	Теорема Зейферта – ван Кампена	2
4	Обчислення фундаментальних груп за допомогою накрить	2
5	Автоморфізми накрить, регулярні накриття, група накриття	2
6	Вищі гомотопічні групи	2
7	Застосування фундаментальної та вищих гомотопічних груп, клітинні простори	2
8	Контрольна робота	2
	Разом	**16**

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин	Форма контролю
	Робота над домашніми завданнями, що відповідають темам практичних занять:		
1	Гомотопії, гомотопічні еквівалентності, ретракції, стяжність	6	Перевірка домашніх завдань
2	Фундаментальна група, індуковані гомоморфізми, однозв'язність	3	Перевірка домашніх завдань
3	Теорема Зейферта – ван Кампена	3	Перевірка домашніх завдань
4	Обчислення фундаментальних груп за допомогою накрить	6	Перевірка домашніх завдань
5	Автоморфізми накрить, регулярні накриття, група накриття	6	Перевірка домашніх завдань
6	Вищі гомотопічні групи	6	Перевірка домашніх завдань
7	Застосування фундаментальної та вищих гомотопічних груп, клітинні простори	6	Перевірка домашніх завдань
8	Підготовка до заліку	6	Залік
	Разом	**42**	

6. Індивідуальні завдання

Немає.

7. Методи навчання

Використовуються пояснювально-ілюстративний (лекції і практичні заняття), репродуктивний (виконання домашніх завдань) і частково-пошуковий (контрольна робота, залік) методи. В умовах воєнного стану заняття проводяться дистанційно за допомогою платформ ZOOM та MOODLE відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна.

8. Методи контролю

Поточний контроль – перевірка виконання домашніх завдань, контрольна робота (1);
Підсумковий контроль – залік (письмовий).

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання								Залік	Сума
Розділ 1		Розділ 2		Розділ 3		Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом		
Т1	Т2	Т1	Т2	Т1	Т2				
5	5	5	5	5	5	30	60	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Контрольна робота включає завдання на гомотопії та гомотопічні еквівалентності, обчислення фундаментальної групи за допомогою теореми Зейферта – ван Кампена і накрить, властивості накрить й оцінюється максимум у 30 балів. За кожне завдання нараховується 3 бали за схемою:

- 3 бали за правильно виконане завдання;
- 2 бали за виконане завдання з помилками/недоліками, що не вплинули на кінцевий результат;
- 1 бал за виконане завдання з технічними/арифметичними помилками при наявності коректної логіки виконання;
- 0 балів в інших випадках

Отримана сума балів зводиться до 15 за формулою $\frac{\text{Сума набраних балів}}{\text{Максимальна сума балів}} \cdot 30$

Критерії оцінювання залікової роботи

Оцінка в балах	Критерії оці-нки	Пояснення

36-40	90-100%	Теоретичний зміст курсу засвоєно цілком, сформовано необхідні практичні навички з освоєним матеріалом, усі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконано в повному обсязі, відмінна робота без помилок або роботи з однією незначною помилкою
28-35	70-89%	Теоретичний зміст курсу засвоєно цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовано, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконано, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконано з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією-двома значними помилками
20-27	50-69%	Теоретичний зміст курсу засвоєно неповністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовано, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань містять помилки, робота з трьома значними помилками
0-19	0-49%	Теоретичний зміст курсу не засвоєно, необхідні практичні навички роботи з навчальним матеріалом не сформовано, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткову самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значного підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	зараховано
70-89	
50-69	
1-49	не зараховано

10. Рекомендована література

Базова література

1. О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. – Харків: Основа, 1995.
2. Є.В. Петров. Топологія. Базовий курс. Навчальний посібник. – Харків: Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2025.
3. A. Hatcher. Algebraic Topology. – Cambridge University Press, 2001.

4. О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. Теорія груп: навчальний посібник. – Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2005.

Допоміжна література

1. C. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. – Cambridge University Press, 1980.
2. W.S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction. – Springer, 1991.
3. J.R. Munkres. Topology. Second Edition. – Prentice Hall, 2000.
4. E.H. Spanier. Algebraic Topology. – Springer, 1994.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. www-library.univer.kharkov.ua
2. https://moodle.karazin.ua/course/view.php?id=8877
3. https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf