

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Проректор з науково-  
педагогічної роботи

Олександр ГОЛОВКО

---

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

Робоча програма навчальної дисципліни  
**функціональний аналіз II**

рівень вищої освіти **магістр**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Професор кафедри фундаментальної математики, доктор фізико-математичних наук,  
професор Кадець Володимир Михайлович**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
протокол № 1 від 26 серпня 2022 року.

Завідувач кафедри



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми

Вячеслав ГОРДЕВСЬКИЙ



Програму погоджено з гарантом освітньої (наукової) програми «Математика»

Гарант освітньої (наукової)  
програми



Ганна ВИШНЯКОВА

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і  
інформатики  
протокол № 1 від 29 серпня 2022 року.

Голова науково-методичної комісії  
АНОЩЕНКО

Ольга

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “**функціональний аналіз II**” складена відповідно до освітньо-професійної та освітньо-наукової програм підготовки **магістр** спеціальності **111 – Математика** освітня програма «**Математика**»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “функціональний аналіз II” є надання майбутнім фахівцям знань у галузі сучасного функціонального аналізу.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам функціонального аналізу та застосуванню цих методів у інших математичних дисциплінах.

1.3. Кількість кредитів – **5**

1.4. Загальна кількість годин – **150**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
<b>Нормативна / за вибором</b>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
<b>1-й</b>	
Семестр	
<b>1-й</b>	
Лекції	
<b>32 год.</b>	
<b>Практичні, семінарські заняття</b>	
<b>32 год.</b>	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
<b>86 год.</b>	
у тому числі індивідуальні завдання	
розрахунково-графічна робота (1)	

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен

**знати :**

- основні факти про банахові простори, підпростори, фактор-простори, класичні приклади банахових просторів;
- стандартні форми теореми Гана-Банаха та методи застосування цієї теореми;
- принцип рівномірної неперервності, теорему про обернений оператор та методи застосування цих теорем;
- означення, приклади та властивості базису Шаудера, критерії поточної збіжності та компактності в термінах базису Шаудера;
- основні факти про компактні множини та компактні оператори в банахових просторах;
- елементи спектральної теорії операторів в банаховому просторі;
- термінологію гільбертова простору, стандартні приклади, загальні теореми та теорію рядів Фур’є у гільбертовому просторі;
- **спектральну теорію самоспряжених операторів:**
- основні факти про оператори в просторі  $L_p$  та перетворення Фур’є.

**уміти :**

- досліджувати множини у нормованих просторах на опуклість, лінійність, замкненість, відкритість, передкомпактність, компактність;
- досліджувати оператори у банаховому просторі на лінійність, неперервність, ін'єктивність; сюр'єктивність, компактність, оцінювати норми операторів;
- користуватися мовою гільбертового простору, досліджувати оператори у банаховому просторі на самоспряженість, унітарність; обчислювати функції від операторів, спектр та власні числа операторів;
- використовувати надбані у курсі знання для розв'язання задач теоретичного характеру.

**2. Тематичний план навчальної дисципліни****Розділ 1. Банахові простори****Тема 1. Оператори у банахових просторах – загальна теорія**

1. Неперервні лінійні оператори. Збіжність за нормою і поточкова збіжність.
2. Фактор-простір та його повнота. Фактор-відображення.
3. Критерій замкненості образу оператора.
4. Спряжений оператор. Зв'язок між властивостями вихідного оператора та спряженого до нього.

**Тема 2. Базиси та їх застосування**

1. Теорема Банаха про оператори частинних сум.
2. Критерій базиса.
3. Опис лінійних функціоналів на просторі з базисом, загальний вигляд лінійного функціонала на  $c_0$  та на  $l_p$ .
4. Другий спряжений простір. Рефлексивні простори.

**Тема 3. Компакти та компактні оператори**

1. Скінченновимірні оператори та апроксимативна одиниця.
2. Критерій передкомпактності множини у просторі з базисом.
3. Теорема Арцела.
4. Теорема Ф.Ріса про некомпактність одиничної кулі.
5. Властивості сім'ї компактних операторів.
6. Теорема Ф.Ріса про компактність спряженого оператора.

**Розділ 2. Теорія операторів****Тема 4. Елементи спектральної теорії операторів**

1. Спектр і власні числа. Теореми про замкненість і обмеженість спектра.
2. Теорема Ліувілля для функцій зі значеннями у банаховому просторі. Теорема про непорожність спектра.
3. Спектральна теорема для компактних операторів у банаховому просторі.

**Тема 5. Оператори у гільбертовому просторі**

1. Формула для норми самоспряженого оператора.
2. Теорема про структуру спектра самоспряженого оператора.
3. Нормальні оператори. Дійсна та уявна частини. Формула для норми.
4. Поліноми та неперервні функції від самоспряженого оператора. Теорема про відображення спектру.
5. Унітарні оператори. Формула полярного розкладу.
6. Обмежені борелеві функції від самоспряженого оператора та спектральна міра.

**Тема 6. Оператори в просторі  $L_p$** 

1. Зв'язок між  $L_p$  при різних  $p$ .
2.  $\delta$ -подібні послідовності і теорема Діні.
3. Перетворення Фур'є в  $L_1$  на осі. Формули обернення. Перетворення Фур'є і згортка. Перетворення Фур'є і диференціювання.
4. Оператор Фур'є в  $L_2$  та його спектральні властивості.
5. Інтерполяційна теорема Ріса–Торіна та наслідки з неї.

**3. Структура навчальної дисципліни**

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Банахові простори</b>												
<b>Тема 1.</b> Оператори у банахових просторах – загальна теорія	32	6*	6			20						
<b>Тема 2.</b> Базиси та їх застосування	23	4*	4			15						
<b>Тема 3.</b> Компакти та компактні оператори	23	4*	4			15						
Разом за розділом 1	78	14	14			50						
<b>Розділ 2. Теорія операторів</b>												
<b>Тема 4.</b> Елементи спектральної теорії операторів	22	6*	6			10						
<b>Тема 5.</b> Оператори у гільбертовому просторі	22	6*	6			10						
<b>Тема 6.</b> Оператори в просторі $L_p$	28	6*	6			16						
Разом за розділом 2	72	18	18			36						
<b>Усього годин</b>	<b>150</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>86</b>						

)\* – За дистанційною формою, на платформі ZOOM.

**4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять**

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Збіжність за нормою і поточкова збіжність	2
2	Фактор-простір	2
3	Лінійна незалежність та повнота систем елементів	2
4	Базиси та координатні функціонали	2
5	Спряжені оператори	2

6	Епсілон-сітки, передкомпакти, компакти	2
7	Скінченновимірні та компактні оператори	2
8	Контрольна робота	2
9	Спектр і власні числа оператора	2
10	Резольвента та її властивсті	2
11	Норма самоспряженого оператора та його спектр	2
12	Функції від оператора	2
13	Унітарні оператори та полярний розклад	2
14	Зв'язок між $L_p$ при різних $p$ .	2
15	Перетворення Фур'є	2
16	Контрольна робота.	2
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання зазначених тем за конспектом:	
1	Оператори у банахових просторах – загальна теорія	20
2	Базиси та їх застосування	10
3	Компакти та компактні оператори	10
4	Елементи спектральної теорії операторів	10
5	Оператори у гільбертовому просторі	10
6	Оператори в просторі $L_p$	16
7	Виконання розрахунково-графічної роботи	10
	<b>Разом</b>	<b>86</b>

### 6. Індивідуальні завдання

Розрахунково-графічна робота (1).

### 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

### 8. Методи контролю

- поточний семестровий (домашні завдання); розрахунково-графічна робота (1); контрольна робота (1);
- підсумковий екзамен.

### 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання					Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Розрахунково-графічна робота	Разом		
15	15	15	15	60	40	100

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

### 10. Рекомендована література

**Основна література**

1. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”)

**Допоміжна література**

1. Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, «Рад. школа», 1948.

2. Березанский Ю. М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г., Функциональный анализ, Київ: «Вища школа», 1990.

3. [Walter Rudin](#) Functional Analysis. McGraw-Hill, 1991

**11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення**

1. [http://page.mi.fu-berlin.de/werner99/kadetsbook/Kadets\\_Functional\\_Analysis.pdf](http://page.mi.fu-berlin.de/werner99/kadetsbook/Kadets_Functional_Analysis.pdf)

2. <https://www.springer.com/us/book/9783319920030>