

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**  
Декан факультету  
математики і інформатики  
Григорій ЖОЛТКЕВИЧ  
“ 18 ” 08 2024 р.



Робоча програма навчальної дисципліни  
**Узагальнені функції**

рівень вищої освіти **перший (бакалаврський)**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітньо-професійна програма - **Математика**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Гефтер Сергій Леонідович – кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри фундаментальної математики**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
протокол від 26 серпня 2024 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика».

Гарант освітньої (наукової)  
програми



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і  
інформатики.

Протокол від 27 серпня 2024 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Узагальнені функції» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавр спеціальність 111 Математика освітня програма «Математика»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни «Узагальнені функції» є ознайомлення студентів з базовими конструкціями, методами і теоремами сучасної теорії узагальнених функцій, а також із змістовними прикладами її застосування.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни «Узагальнені функції» є ознайомлення студентів з теоретичними засадами теорії лінійних функціоналів у різних просторах гладких функцій, а також набуття студентами навичок проведення обчислень, що пов'язані з узагальненими функціями.

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

СК01. Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

СК03. Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.

СК08. Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

1.3. Кількість кредитів – 4

1.4. Загальна кількість годин – 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
За вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
5-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
у тому числі Індивідуальні завдання	

1.6. Програма вивчення вибіркової навчальної дисципліни «Узагальнені функції» передбачає засвоєння основних понять теорії узагальнених функцій та вироблення навичок її застосування для розв'язання задач сучасної теорії лінійних диференціальних рівнянь та гармонічного аналізу.

**Програмні результати навчання за ОПП:**

PH16. Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.

PH18. Знати теоретичні основи і застосовувати методи теорії функцій комплексної змінної.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

*Тема 1. Класичний простір основних і узагальнених функцій.* Простір гладких фінітних функцій, збіжність у цьому просторі. Поняття узагальненої функції, основні приклади. Збіжність у просторі узагальнених функцій, важливі приклади.

*Тема 2. Узагальнені функції повільного зростання.* Простір Шварца. Перетворення Фур'є у просторі Шварца. Узагальнені функції у просторі Шварца. Перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного зростання. Приклади обчислення. Ряди Фур'є для узагальнених функцій.

*Тема 3. Узагальнені функції багатьох змінних.* Частинні похідні узагальнених функцій. Зв'язок із класичними інтегральними теоремами багатовимірного математичного аналізу. Однорідні узагальнені функції. Рівняння Ейлера.

*Тема 4. Деякі диференціальні рівняння у просторах узагальнених функцій.* Звичайні лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Рівняння Лапласа та теплопровідності. Одновимірне хвильове рівняння. Згортка і фундаментальний розв'язок. Загальна теорема Мальгранжа-Еренпрайса про існування фундаментального розв'язку. Формальні узагальнені функції. Деякі нелінійні диференціальні рівняння у просторі формальних узагальнених функцій.

## 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	усього	денна форма					заочна форма					
		у тому числі					усьог о	у тому числі				
	л	п	ла б	інд	ср			л	п	ла б	інд	ср
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Тема 1. <i>Класичний простір основних і узагальнених функцій</i>	30	8	8			14						
Тема 2. <i>Узагальнені функції повільного зростання</i>	30	8	8			14						
Тема 3. <i>Узагальнені функції багатьох змінних</i>	30	8	8			14						
Тема 4. <i>Деякі диференціальні рівняння у просторах узагальнених функцій</i>	30	8	8			14						
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>						

## 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Теми практичних занять	Кількість годин
1	Розв'язання елементарних задач стосовно базових понять теорії узагальнених функцій.	4

2	Обчислення похідних і границь для узагальнених функцій однієї змінної.	6
3	Обчислення перетворення Фур'є функцій з простору Шварца та узагальнених функцій повільного зростання.	6
4	Гармонічні сферично-симетричні функції. Фундаментальний розв'язок для оператора Лапласа у випадку 2-х і 3-х змінних.	4
5	Фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності.	2
6	Фундаментальний розв'язок для одновимірного хвильового рівняння.	2
7	Узагальнені розв'язки деяких звичайних диференціальних рівнянь.	3
8	Перетворення Лапласа для звичайних та узагальнених функцій.	3
9	Контрольна робота.	2
<b>Разом</b>		<b>32</b>

### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Ознайомлення з теоретичними відомостями із загальної теорії топологічних векторних просторів та неперервних лінійних функціоналів в них.	6
2	Зв'язок теорії узагальнених функцій з комплексним аналізом.	2
3	Ознайомлення з теоретичними відомостями та розв'язання задач стосовно базових понять теорії узагальнених функцій.	6
4	Ознайомлення з теоретичними відомостями та розв'язання задач стосовно перетворення Фур'є основних та узагальнених функцій.	8
5	Ознайомлення з теоретичними відомостями та розв'язання елементарних задач стосовно рядів Фур'є для узагальнених функцій.	6
6	Ознайомлення з теоретичними відомостями та розв'язання задач стосовно узагальнених функцій від багатьох змінних.	10
7	Приклади застосування узагальнених функцій в електростатиці.	4
8	Знаходження узагальнених розв'язків звичайних диференціальних рівнянь.	6
9	Знаходження узагальнених розв'язків деяких диференціальних рівнянь з частинними похідними.	8
<b>Разом</b>		<b>56</b>

### 6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом.

### 7. Методи навчання

Використовуються пояснювально-ілюстративний, (лекції і практичні заняття), репродуктивний (виконання домашніх завдань) і частково-пошуковий (контрольні роботи) методи.

### 8. Методи контролю

Поточне опитування, контрольна робота (1), підсумковий контроль – залік.

## 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання					Залік	Сума
Тема 1	Тема 2	Тема 3, 4	контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом		
10	10	20	20	60	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

### Критерії оцінювання

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

	Оцінка за національною шкалою
--	-------------------------------

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	для чотирирівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. Rudin W. Functional Analysis 2nd Edition, 1991. – McGraw-Hill Science / Engineering / Math. – 448 pp.
2. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”).

### Допоміжна література

1. Городецький В. В., Нагнибіда М. І. Узагальнені функції. Теореми і задачі. Ч. 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 205 с.
2. Городецький В. В., Нагнибіда М. І. Узагальнені функції. Теореми і задачі. Ч. 2. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 206 с.
3. Городецький В.В., Дрінь Я.М., Нагнибіда М.І. Узагальнені функції. Навчальний посібник. – Чернівці: Книги – XXI, 2011. – 504 с.
4. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Івасюк Г.П., Рева Н.В. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики. – Чернівці: Видавничий дім «Родовід», 2015. – 326 с.
5. S.L. Hefter, O.L. Piven', Infinite-Order Differential Operators in the Module of Formal Generalized Functions and in a Ring of Formal Power Series. Ukr. Math. J. 74, 896–915 (2022). <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02116-z>

## 11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. [www-library.univer.kharkov.ua](http://www-library.univer.kharkov.ua)
2. <https://mathworld.wolfram.com/topics/GeneralizedFunctions.html>