Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

 “**ЗАТВЕРДЖУЮ**”

Проректор з науково- педагогічної роботи

 Пантелеймонов А.В.

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

 “\_\_\_\_”\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2018 р.

# Робоча програма навчальної дисципліни

**Диференціальна геометрія**

спеціальність (напрям) **111 - математика**

спеціалізація \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(шифр, назва спеціалізації)

факультет **математики і інформатики**

2018 / 2019 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2018 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Ямпольський Олександр Леонідович, докт. фіз..-мат. наук, доцент кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики

Протокол від 27 серпня 2018 року № 1.

 Завідувач кафедри Ямпольський О.Л.

Програму погоджено методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від 27 серпня 2018 року № 1.

 Голова методичної комісії Анощенко О.О.

**Вступ**

Програма навчальної дисципліни **“Диференціальна геометрія”** складена відповідно до освітньо-професійної (освітньо-наукової) програми підготовки **бакалавр**

спеціальності (напряму) **111-математика**

спеціалізації \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**1. Опис навчальної дисципліни**

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни “Диференціальна геометрія” полягає в оволодінні основами диференціальної геометрії кривих та поверхонь у 3-вимірному евклідовому прострі

1.2. Основні завдання вивчення дисципліни “Диференціальна геометрія” полягають у послідовному застосуванні методів математичного аналізу, лінійної алгебри та топології для вивчення геометричних властивостей кривих і поверхонь в тривимірному просторі.

 1.3. Кількість кредитів – **8**

1.4. Загальна кількість годин – **240**

|  |
| --- |
|  1.5. Характеристика навчальної дисципліни |
| **Нормативна** / за вибором |
| Денна форма навчання | Заочна (дистанційна) форма навчання |
| Рік підготовки |
| **3-й** |  |
| Семестр |
| **5-й – 6-й** |  |
| Лекції |
| **64 год.** |  |
| Практичні, семінарські заняття |
| **64 год.** |   |
| Лабораторні заняття |
|   |   |
| Самостійна робота |
| **112 год.** |  |
| Індивідуальні завдання  |
|  |

1.6. Заплановані результати навчання

 У результаті вивчення даного курсу студент повинен **знати:**

* визначення регулярної кривої і поверхні;
* визначення натурального параметру для кривої;
* визначення кривини і скруту кривої;
* основну теорему теорії кривих на площині і в просторі;
* визначення сферичного образу кривої і поверхні;
* визначення першої і другої фундаментальних форм для поверхні;
* визначення ізометрії та конформного відображення, критерії;
* визначення головних кривин та головних напрямів на поверхні, ліній кривини;
* визначення Гаусової та середньої кривин поверхні;
* класифікацію точок регулярної поверхні за щільнодотичним параболоїдом і Гаусовою кривиною;
* визначення асімптотичних напрямів та асімптотичних ліній;
* дериваційні формули Гауса і Вейнгартена;
* визначення геодезичної лінії;
* визначення мінімальної поверхні;
* означення паралельного переносу вектора уздовж кривої
* формулу Гауса-Бонне;
* означення тензора;
* означення коваріантної похідної тензора;
* означення тензора кривини;

**уміти:**

* знайти кривину і крутіння кривої;
* знайти рівняння ребер і граней тригранника Френе;
* знайти довжину кривої на заданому проміжку;
* знайти параметричне рівняння плоскої кривої за її кривизною, радіусом кривизни та опорною функцією;
* знайти еволюту та евольвенту плоскої кривої;
* знайти першу та другу фундаментальні форми поверхні;
* знайти площу області на поверхні;
* знайти кут між кривими на поверхні;
* знайти головні кривини і напрямки на поверхні;
* знайти Гаусову і середню кривини поверхні;
* знайти лінії кривини та асимптотичні лінії на поверхні;
* знайти геодезичну кривизну кривої на поверхні;
* знайти коваріантну похідну тензора;
* знайти компоненти тензора кривини.

**2. Тематичний план навчальної дисципліни**

**Семестр 5.**

***Розділ 1****.* Способи завдання кривих і поверхонь.

*Тема 1.* *Способи завдання кривих*

Параметризовані криві; Неявно задані криві; Регулярні криві; Дотична пряма; Нормаль до плоскої кривої .

*Тема2.* *Способи завдання поверхонь*

Параметризовані поверхні; Неявно задані поверхні; Регулярні поверхні; Дотична площина; Нормаль до поверхні.

***Розділ 2****.* Теорія кривих

*Тема 1. Теорія плоских кривих*

Основні положення теорії кривих; Поняття регулярної кривої; Натуральна параметризація; Кривина кривої; Формули Френе; Основна теорема теорії плоских кривих ; Обвідна; Еволюта і евольвента плоскої кривої; Овали, теорема про 4 вершини овалу; Овали сталої ширини.

*Тема2. Теорія просторових кривих*

Репер Френе та тригранник Френе; Кручення кривої; Формули Френе;

 Щільний дотик кривих і поверхонь; Щільно дотична площина та щільно дотична сфера; Основна теорема теорії кривих у E3.

*Розділ 3* Теорія поверхонь.

*Тема 1. Перша фундаментальна форма поверхні*

 Поняття регулярної поверхні; Дотична площина поверхні; Перша фундаментальна форма поверхні; довжина кривої, кут між кривими, площа області на поверхні; Відображення поверхонь, Ізометрія, Конформні відображення.

*Тема 2 Друга фундаментальна форма поверхні*

Друга фундаментальна форма поверхні; Дотичний параболоїд поверхні.

Сферичне (Гаусове) відображення; Гаусова кривина поверхні; Нормальна кривина; Головні кривини і головні напрямки; Формули Родріга; Індикатриса Дюпена; Формула Ейлера; Цілком омбілічні поверхні; Лінії кривини; Асимптотичні лінії; Геодезична кривина кривої; Геодезичні лінії.

*Тема 3 Основні рівняння теорії поверхонь*

Дериваційні формули Гауса і Вейнгартена; Теорема Egregium Гауса; Рівняння Гауса і Кодацці; Теорема Бонне.

**Семестр 6.**

***Розділ 1****.* Спеціальні класи поверхонь.

*Тема 1. Спеціальні координатні системи на поверхнях*

Ортогональні координатні сітки; Координати з ліній кривини; Третя фундаментальна форма поверхні та теорема Бельтрамі-Еннепера; Асимптотична координатна сітка; Чебишевська координатна сітка; Напівгеодезичні декартові координати; Лема Гауса та напівгеодезичні полярні координати; Геодезичні як локально найкоротші.

*Тема 2. Поверхні сталої гаусової кривини*

Метрики сталої кривини, теорема Міндінга; Будова поверхні нульової кривини; Теорема Гільберта; Теорема Лібмана.

*Тема 3. Мінімальні поверхні.*

Варіація довжини кривої; Геодезичні як екстремалі функціонала довжини;

Варіація площі поверхні; Мінімальні поверхні; Гелікоїд, катеноїд та поверхня Шерка як єдині мінімальні поверхні в своїх класах.

***Розділ 2*.** Елементи внутрішньої геометрії поверхонь і многовидів*.*

*Тема 1. Формула Гауса-Бонне*.

Абсолютний (коваріантний) диференціал векторного поля; Паралельні векторні поля на поверхнях; Паралельні векторні поля уздовж кривої. Паралельний перенос вектору уздовж замкненого контуру; Формула Гауса-Боне; Інтегральна формула Гауса; Теорема Якобі.

*Тема 2. Тензори в диференціальній геометрії.*

Алгебраїчні операції над тензорами; Диференціювання тензора; Диференціально-геометрична зв’язність; Тензор кривини; Тензор Річчі і скалярна кривина; Диференціальні параметри Бельтрамі; Лапласіан, дивергенція, ротор.

**3. Структура навчальної дисципліни**

**Семестр 5.**

|  |  |
| --- | --- |
| Назви розділів і тем | Кількість годин |
| денна форма | заочна форма |
| усього  | у тому числі | усього  | у тому числі |
| л | п | лаб | інд. | с. р. | л | п |  лаб | інд. | с. р. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **Розділ 1.** Способи завдання кривих і поверхнь |
| Тема 1. Способи завдання кривих | 12 | 2 | 2 |  |  | 8 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 2. Способи завдання поверхонь | 12 | 2 | 2 |  |  | 8 |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом 1 | 24 | 4 | 4 |  |  | 16 |  |  |  |  |  |  |
| **Розділ 2.** Теорія кривих |
| Тема 1. Теорія плоских кривих | 22 | 6 | 6 |  |  | 10 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 2. Теорія просторових кривих | 16 | 4 | 4 |  |  | 8 |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом 2 | 38 | 10 | 10 |  |  | 18 |  |  |  |  |  |  |
| **Розділ 3.** Теорія поверхонь |
| Тема 1. Перша фундаментальна форма поверхні | 20 | 6 | 6 |  |  | 8 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 2. Друга фундаментальна форма поверхні | 24 | 8 | 8 |  |  | 8 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 3. Основні рівняння теорії поверхонь | 14 | 4 | 4 |  |  | 6 |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом3 | 58 | 18 | 18 |  |  | 22 |  |  |  |  |  |  |
| Усього годин  | **120** | **32** | **32** |  |  | **56** |  |  |  |  |  |  |

**Семестр 6**

|  |  |
| --- | --- |
| Назви розділів і тем | Кількість годин |
| денна форма | заочна форма |
| усього  | у тому числі | усього  | у тому числі |
| л | п | лаб | інд. | с. р. | л | п | лаб. | інд. | с. р. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **Розділ 1.** Спеціальні класи поверхонь |
| Тема 1. Спеціальні координатні систе-ми на поверхнях | 24 | 6 | 6 |  |  | 12 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 2. Поверхні сталої гаусової кривини | 24 | 6 | 6 |  |  | 12 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 3. Мінімальні поверхні | 24 | 6 | 6 |  |  | 12 |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом 1 | 72 | 18 | 18 |  |  | 36 |  |  |  |  |  |  |
| **Розділ 2.** Елементи внутрішньої геометрії поверхонь і многовидів |
| Тема 1. Формула Гауса-Бонне | 22 | 6 | 6 |  |  | 10 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 2Тензори в диференціальній геометрії. | 26 | 8 | 8 |  |  | 10 |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом2 | 48 | 14 | 14 |  |  | 20 |  |  |  |  |  |  |
| Усього годин  | **120** | **32** | **32** |  |  | **56** |  |  |  |  |  |  |

**4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять**

**Семестр 5**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №з/п | Назва теми | Кількістьгодин |
| 1 | Поняття регулярної кривої Дотична пряма; Нормаль до плоскої кривої . |  2 |
| 2 | Параметризовані поверхні; Неявно задані поверхні; Регулярні поверхні; Дотична площина; Нормаль до поверхні | 2 |
| 3 | Натуральна параметризація; Кривина кривої; Формули Френе; | 2 |
| 4 | Основна теорема теорії плоских кривих | 2 |
| 5 | Обвідна; Еволюта і евольвента плоскої кривої | 2 |
| 6 | Репер Френе та тригранник Френе; Кручення кривої; Формули Френе;  | 2 |
| 7 | Щільний дотик кривих і поверхонь; Щільно дотична площина та щільно дотична сфера; | 2 |
| 8 | Поняття регулярної поверхні; Дотична площина поверхні; Перша фундаментальна форма поверхні; довжина кривої; | 2 |
| 9 | Кут між кривими, площа області на поверхні; Ізометрія; Конформні відображення. | 2 |
| 10 | Друга фундаментальна форма поверхні; Дотичний параболоїд поверхні;Сферичне (Гаусове) відображення; Гаусова кривина поверхні; | 2 |
| 11 | Нормальна кривина; Головні кривини і головні напрямки; Формули Родріга; | 2 |
| 12 | Індикатриса Дюпена; Формула Ейлера; Цілком омбілічні поверхні; | 2 |
| 13 | Лінії кривини; Асимптотичні лінії; | 2 |
| 14 | Геодезична кривина кривої; Геодезичні лінії | 2 |
| 15 | Дериваційні формули Гауса і Вейнгартена; | 2 |
| 16 | Теорема Egregium Гауса;  | 4 |
|  | *Разом* | 34 |

**Семестр 6**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №з/п | Назва теми | Кількістьгодин |
| 1 | Ортогональні координатні сітки; Координати з ліній кривини;  | 2 |
| 2 | Третя фундаментальна форма поверхні; | 2 |
| 3 | Асимптотична координатна сітка; | 2 |
| 4 | Напівгеодезичні декартові координати;  | 2 |
| 5 | Напівгеодезичні полярні координати;  | 2 |
| 6 | Геодезичні лінії на різних класах поверхонь; | 2 |
| 7 | Мінімальні поверхні; | 2 |
| 8 | Абсолютний (коваріантний) диференціал векторного поля; | 2 |
| 9 | Паралельні векторні поля уздовж кривої. | 2 |
| 10 | Паралельний перенос вектору уздовж замкненого контуру; | 2 |
| 11 | Формула Гауса-Боне; | 2 |
| 12 | Алгебраїчні операції над тензорами; | 2 |
| 13 | Диференціювання тензора; | 2 |
| 14 | Диференціально-геометрична зв’язність; | 2 |
| 15 | Тензор кривини; Тензор Річчі і скалярна кривина; | 2 |
| 16 | Диференціальні параметри Бельтрамі; Лапласіан, дивергенція, ротор.  | 4 |
|  | *Разом* | **34** |

**5. Завдання для самостійної роботи**

**Семестр 5**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №з/п | Назва теми | Кількістьгодин |
| 1 | Дотична пряма; Нормаль до плоскої кривої . | 2 |
| 2 | Регулярні поверхні; Дотична площина; Нормаль до поверхні | 2 |
| 3 | Натуральна параметризація; Кривина кривої; Формули Френе; | 4 |
| 4 | Основна теорема теорії плоских кривих | 2 |
| 5 | Обвідна; Еволюта і евольвента плоскої кривої | 2 |
| 6 | Репер Френе; Кручення кривої; Формули Френе;  | 4 |
| 7 | Щільний дотик кривих і поверхонь | 4 |
| 8 | Перша фундаментальна форма поверхні; довжина кривої; | 4 |
| 9 | Кут між кривими, площа області на поверхні; Ізометрія; | 4 |
| 10 | Друга фундаментальна форма поверхні; Гаусова кривина поверхні; | 4 |
| 11 | Нормальна кривина; Головні кривини і головні напрямки | 4 |
| 12 | Індикатриса Дюпена; Формула Ейлера;  | 4 |
| 13 | Лінії кривини; Асимптотичні лінії; | 4 |
| 14 | Геодезична кривина кривої; Геодезичні лінії | 4 |
| 15 | Дериваційні формули Гауса і Вейнгартена; | 4 |
| 16 | Теорема Egregium Гауса;  | 4 |
|  | *Разом* | **56** |

**Семестр 6**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №з/п | Назва теми | Кількістьгодин |
| 1 | Ортогональні координатні сітки; Координати з ліній кривини;  | 2 |
| 2 | Третя фундаментальна форма поверхні; | 2 |
| 3 | Асимптотична координатна сітка; | 4 |
| 4 | Напівгеодезичні декартові координати;  | 2 |
| 5 | Напівгеодезичні полярні координати;  | 2 |
| 6 | Геодезичні лінії на різних класах поверхонь; | 4 |
| 7 | Мінімальні поверхні; | 4 |
| 8 | Абсолютний (коваріантний) диференціал векторного поля; | 4 |
| 9 | Паралельні векторні поля уздовж кривої. | 4 |
| 10 | Паралельний перенос вектору уздовж замкненого контуру; | 4 |
| 11 | Формула Гауса-Бонне; | 4 |
| 12 | Алгебраїчні операції над тензорами; | 4 |
| 13 | Диференціювання тензора; | 4 |
| 14 | Диференціально-геометрична зв’язність; | 4 |
| 15 | Тензор кривини; Тензор Річчі і скалярна кривина; | 4 |
| 16 | Диференціальні параметри Бельтрамі; Лапласіан, дивергенція, ротор.  | 4 |
|  | *Разом* | **56** |

**6. Індивідуальні завдання**

**Семестр 5**

1. Залікове завдання з теорії кривих і поверхонь.

**Семестр 6**

1. Залікове завдання з тензорного аналізу.

**7. Методи контролю**

– облік відвідування аудиторних занять;

– перевірка виконання індивідуальних завдань.

**8. Схема нарахування балів**

**Семестр 5**

|  |  |
| --- | --- |
| Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання | Сума |
| Розділ 1 | Розділ 2 | Розділ 3 | Контрольні роботи, передбачені навчальним планом | Колоквіум | Індивідуальне завдання |
| Т1 | Т2 | Т1 | Т2 | Т1 | Т2 | Т3 | 10 | 20 | 10 | 100 |
| 5 | 10 | 10 | 5 | 10 | 10 | 10 |

**Семестр 6**

|  |  |
| --- | --- |
| Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання | Сума |
| Розділ 1 | Розділ 2 | Контрольні роботи, передбачені навчальним планом | Колоквіум | Індивідуальне завдання |  |
| Т1 | Т2 | Т3 | Т1 | Т2 | 10 | 20 | 20 | 100 |
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |

**Шкала оцінювання**

**Семестр 5**

|  |  |
| --- | --- |
| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка |
|  для екзамену |  Для заліку |
| 90 – 100 | відмінно |  зараховано |
| 70-89 | добре |
| 50-69 | задовільно |
| 1-49 | незадовільно |  не зараховано |

**Семестр 6**

|  |  |
| --- | --- |
| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка |
|  для екзамену |  Для заліку |
| 90 – 100 | відмінно |  зараховано |
| 70-89 | добре |
| 50-69 | задовільно |
| 1-49 | незадовільно |  не зараховано |

**Критерії оцінювання**

|  |  |
| --- | --- |
| Оцінка в балах  | Оцінка за національною шкалою |
| Оцінка  | Пояснення |
| 90 – 100  | Відмінно | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.  |
| 70 – 89 | Добре | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.  |
| 50 –69 | Задовільно | Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.  |
| 1–49 | Незадовільно | Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки  |

**9. Рекомендована література**

**Базова**

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Основа, 1995 р.
2. Аминов Ю.А. Диференциальная геометрия и топология кривих, Наука, 1987.
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М, Наука 1986.
4. Рашевский П.К. Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1948.

**Допоміжна**

1. Позняк Э. Г., Шикин В.Б. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М., Наука, 1986
2. Бляшке В. Диференциальная геометрия. ОНТИ, 1935.

**10. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення**

1. www-library.univer.kharkov.ua