

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Проректор з науково-педагогічної  
роботи

Пантелеймонов А.В

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2019 р.

Робоча програма навчальної дисципліни  
**“ВСТУП ДО ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ”**

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

019/ 2020 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2019 року, протокол № 7

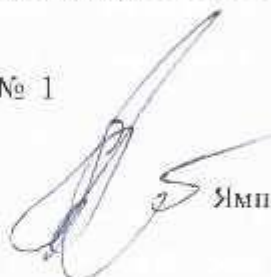
РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**д.ф.-м.н., старший науковий співробітник, професор кафедри фундаментальної математики Шепельський Дмитро Георгійович**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики

протокол від 27 серпня 2019 року № 1

Завідувач кафедри



Ямпольський О.Л.

Програму погоджено методичною комісією факультету математики і інформатики

протокол від 27 серпня 2019 року № 1.

Голова методичної комісії



Анощенко О.О.

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “ **ВСТУП ДО ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ**” складена відповідно до освітньо-професійної (освітньо-наукової) програми підготовки «бакалавр»

спеціальності **111 - Математика**

спеціалізації

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є ознайомлення майбутніх бакалаврів зі спектральною теорією операторів на прикладі диференціального оператора Штурма-Ліувілля та скінченно-різницевого оператора Якобі.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є опанування основними методами дослідження диференціальних та різницевих операторів, включаючи дослідження спектру та прямої і оберненої спектральних задач для таких операторів.

**1.3. Кількість кредитів: 4**

**1.4. Загальна кількість годин: 120**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
<b>4-й</b>	
Семестр	
<b>7-й</b>	
Лекції	
<b>24 год.</b>	
Практичні, семінарські заняття	
<b>24 год.</b>	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
<b>72 год.</b>	
Індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання:

**Знати:**

- поняття і типи обернених задач;
- методи дослідження спектральних задач для диференціальних операторів;
- поняття операторів перетворення та методи їх побудови;
- теореми єдиності реконструкції операторів за спектральною інформацією;
- формули Кристофеля-Дарбу та Гріна, властивості розв'язків рівняння Якобі;
- поняття неперервного спектра, резольвентної множини, спектральної функції на півосі та спектральної матриці на всій осі;

- структуру оператора резольвенти на півосі та на всій осі;
- теорію Вейля для випадку граничної точки.

**Уміти:**

- досліджувати асимптотику власних значень диференціальних операторів з різними типами крайових умов;
- будувати та досліджувати оператори перетворення для диференціальних операторів другого порядку;
- досліджувати питання єдиності реконструкції диференціальних з різними типами спектральних та не спектральних даних,
- будувати спектральну міру у випадку скінченної матриці Якобі і розв'язувати асоційовану обернену задачу;
- аналізувати поведінку розв'язків Вейля і будувати спектральне розкладання на півосі та на всій осі;

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### Розділ 1. Пряма та обернена спектральна задача для операторів Штурма-Ліувілля.

- **Тема 1.** Диференціальний оператор Штурма-Ліувілля: оцінки для фундаментальної системи.

Загальна форма операторів другого порядку. Зведення до форми Штурма-Ліувілля.

Крайові умови для задачі на скінченному інтервалі.

- **Тема 2.** Похідні Фреше розв'язків фундаментальної системи.

Похідна Фреше операторів у бананових просторах. Похідна Фреше власних функцій оператора Штурма-Ліувілля відносно спектрального параметра. Похідна Фреше відносно потенціалу.

- **Тема 3.** Асимптотика власних значень та власних функцій.

Характеристична функція спектральної задачі. Застосування теореми Руше до дослідження розподілу нулів характеристичної функції

- **Тема 4.** Крайові задачі для гіперболічних рівнянь.

Гіперболічні рівняння, що виникають при побудові операторів перетворення. Задача Гурса. Задача Коші. Зведення до інтегральних рівнянь типу Вольтера

- **Тема 5.** Оператори перетворення.

Інтегральний оператор Гельфанда-Левітана-Марченка. Зведення до задачі Гурса.

- **Тема 6.** Обернена задача для операторів Штурма-Ліувілля.

Теорема єдиності відновлення потенціалу за двома спектрами. Теорема єдиності за одним спектром для симетричних потенціалів

### Розділ 2. Пряма та обернена спектральна задача для скінченних, напівнескінченних та нескінченних матриць Якобі.

- **Тема 7.** Загальні властивості розв'язків рівняння Якобі на всій осі.

Дискретний вронскіан, властивості нулів розв'язків типу синус та косинус. Зв'язок з детермінантами скінченних матриць Якобі.

- **Тема 8.** Пряма та обернена задачі спектрального аналізу для скінченної матриці Якобі.

Спектр і спектральна функція скінченної матриці Якобі. Ортогональні поліноми. Процес ортогоналізації Шмідта. Обернена задача за спектральною функцією.

- **Тема 9.** Обернена задача для скінченної матриці Якобі за двома спектрами.

Пряма задача: чергування точок дискретного спектра. Теорема єдиності.

- **Тема 10.** *Спектральна функція і функція Вейля на півосі.*  
Матриці операторнозначної міри і оператора резольвенти. Ортогональність многочленів. Спектральний аналіз матриці зі сталими елементами (незбурений дискретний Лапласіан на півосі).
- **Тема 11.** *Розв'язки Вейля і спектральна матриця задачі на осі.*  
Функції і розв'язки Вейля задач на півосях. Спектральний аналіз нескінченної матриці Якобі зі сталими елементами.
- **Тема 12.** *Періодична матриця Якобі періоду 2.*  
Розв'язки Флоке, спектр, додатковий спектр, розв'язання оберненої задачі.

### 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
Л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7
<b>Розділ 1. Пряма спектральна задача для операторів Штурма-Ліувілля</b>						
<b>Тема 1.</b> Диференціальний оператор Штурма-Ліувілля. Оцінки для фундаментальної системи.	10	2	2			6
<b>Тема 2.</b> Похідні Фреше розв'язків фундаментальної системи.	10	2	2			6
<b>Тема 3.</b> Асимптотика власних значень	10	2	2			6
<b>Тема 4</b> Крайові задачі для гіперболічних рівнянь.	10	2	2			6
<b>Тема 5.</b> Оператори перетворення.	10	2	2			6
<b>Тема 6.</b> Обернена задача для операторів Штурма-Ліувілля.	10	2	2			6
<b>Разом за розділом 1</b>	<b>60</b>	<b>12</b>	<b>12</b>			<b>36</b>
<b>Розділ 2. Обернена спектральна задача для операторів Штурма-Ліувілля</b>						
<b>Тема 7.</b> Загальні властивості розв'язків рівняння Якобі на всій осі	10	2	2			5
<b>Тема 8.</b> Пряма та обернена задачі спектрального аналізу для скінченної матриці Якобі	10	2	2			5
<b>Тема 9.</b> Обернена задача для скінченної матриці Якобі за двома спектрами	10	2	2			5
<b>Тема 10.</b> Спектральна функція і функція Вейля на півосі	10	2	2			5
<b>Тема 11.</b> Розв'язки Вейля і спектральна матриця задачі на осі	10	2	2			5
<b>Тема 12.</b> Періодична матриця Якобі періоду 2	4	2	2			5
<b>Разом за розділом 2</b>	<b>54</b>	<b>12</b>	<b>12</b>			<b>30</b>
Підготовка до екзамену (за вибором)	<b>6</b>					<b>6</b>
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>24</b>	<b>24</b>			<b>72</b>

#### 4. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Крайові задачі на скінченному інтервалі.	2
2	Початкові задачі для рівняння Штурма-Ліувілля.	2
3	Уточнення асимптотичної формули розподілу власних значень для задачі з крайовими умовами Діріхле.	2
4	Інтегральний оператор Гельфанда-Левітана-Марченка. Зведення до задачі Гурса	2
5	Повнота системи власних функцій операторів Штурма-Ліувілля	2
6	Задача ідентифікації параметрів гіперболічних рівнянь	2
7	Формули Кристофеля-Дарбу та Гріна	2
8	Спектр і спектральна функція скінченної матриці Якобі.	2
9	Пряма задача: чергування точок дискретного спектра. Алгоритм відновлення матриці. Теорема єдиності	2
10	Зв'язок між спектральною функцією і функцією Вейля.	2
11	Побудова ядра оператора резольвенти.	2
12	Функція Ляпунова, функції Вейля.	2
	Разом	<b>24</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання додаткового матеріалу за відповідними темами. Виконання домашніх завдань:	
1	Загальна форма операторів другого порядку. Зведення до форми Штурма-Ліувілля. (Домашнє завдання)	6
2	Ряди Неймана для інтегральних операторів.	6
3	Похідна Фреше відносно потенціалу (Домашнє завдання)	6
4	Крайові задачі мішаного типу. (Домашнє завдання)	6
5	Власні функції операторів Штурма-Ліувілля. (Домашнє завдання)	6
6	Задачі з обмеженнями. Існування мінімізуючих функцій. Варіаційна характеристика мінімізуючих функцій.	6
7	Спектральні властивості компактного оператора. Поняття неперервного спектра самоспряженого оператора	5
8	Операторний підхід до проблеми моментів	5
9	Неперервні дроби.	5
10	Формула обернення Стільтьєса-Перрона	5
11	Резольвентні тотожності	5
12	Характеристичні властивості спектру періодичної задачі	5
	Підготовка до екзамену (за вибором).	6
	Разом	<b>72</b>

6.

**Індивідуальні завдання***Не передбачені планом***7. Методи контролю**

Навчання здійснюється у формі лекцій, практичних занять, а також у формі самостійної роботи (опрацювання навчального матеріалу, розв'язання учбових задач). Методи контролю: контрольна робота, поточний (домашні завдання); підсумковий семестровий екзамен (за вибором студента).

**8. Схема нарахування балів**

Розділ 1						Розділ 2						Контроль на робота	Разом	Екзамен	Сума
Т 1	Т 2	Т 3	Т 4	Т 5	Т 6	Т 7	Т 8	Т 9	Т 10	Т 11	Т 12	20	60	40	100
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	5				

**Шкала оцінювання**

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

**Критерії оцінювання**

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.

50 –69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

## 9. Рекомендована література

### Основна література

1. Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer- Verlag, New York, 1996.

### Допоміжна література

1. Poschel J., Trubowitz E., Inverse Spectral Theory.- Academic Press, London, 1987.
2. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. – AMS, 2000

## 10. Посилання на інформаційні ресурси

**Wolfram Math World:**

<http://mathworld.wolfram.com/topics/PartialDifferentialEquations.html> Wikipedia:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Differential\\_equation#Partial\\_differential\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation#Partial_differential_equations) MathOverflow:

<http://mathoverflow.net/questions/tagged/differential-equations>