

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра фундаментальної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор з науково-
педагогічної роботи

Олександр ГОЛОВКО

“ ____ ” _____ 2022 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

Лінійна алгебра

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 - Математика та статистика, 01 – Освіта/Педагогіка**

спеціальність **111 – Математика, 113 – Прикладна математика,
014.04 – Середня освіта (Математика)**

освітня програма **«Математика», «Прикладна математика»,
«Математика та інформатика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

від 29 серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Каролінський Євген Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол № 1 від 26 серпня 2022 року.

Завідувач кафедри



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)
програми



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Прикладна
математика»

Гарант освітньої (професійної)
програми

Світлана ІГНАТОВИЧ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика та
інформатика».

Гарант освітньої (професійної)



програми

Ганна ЧЕРНОВА

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і
інформатики



протокол № 1 від 29 серпня 2022 року.

Голова науково-методичної комісії

Ольга АНОЩЕНКО

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Лінійна алгебра” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки «бакалавр» спеціальності **111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 014.04 – Середня освіта (Математика)**, освітня програма «Математика», «Прикладна математика», «Математика та інформатика»

1. Опис навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни є навчання майбутніх спеціалістів основам лінійної алгебри, а також многочленам декількох змінних.

Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам алгебри та застосуванню цих методів для розв’язання різноманітних задач теоретичного та практичного характеру.

Кількість кредитів – **6**

Загальна кількість годин – **180**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
2-й	
Семестр	
3-й	
Лекції	
48 год.	
Практичні, семінарські заняття	
48 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
84 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен **знати:**

- ✓ Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур.
- ✓ Теорію систем лінійних рівнянь та основні методи їх розв’язання.
- ✓ Теорію визначників та основні методи обчислення визначників.
- ✓ Аксиоми лінійного простору. Приклади лінійних просторів.
- ✓ Поняття лінійної незалежності та повноти системи векторів.
- ✓ Поняття базису та розмірності лінійного простору.
- ✓ Поняття підпростору. Способи завдання підпростору. Властивості суми та перетину підпросторів, формулу Грасмана для розмірності суми.
- ✓ Поняття прямої суми та додаткового підпростору.
- ✓ Поняття рангу матриці, теорему про ранг.
- ✓ Поняття факторпростору.
- ✓ Визначення, основні властивості та приклади лінійних відображень, в тому числі властивості ядра та образу лінійного відображення, завдання лінійного відображення матрицею, операції над лінійними відображеннями та матрицями, залежність матриці

лінійного відображення від вибору базису.

- ✓ Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур.
- ✓ Основні властивості многочленів декількох змінних. Основну теорему про симетричні многочлени.
- ✓ Теорію жорданової форми лінійного оператора.
- ✓ Означення та властивості білінійних та квадратичних функціоналів, в тому числі зв'язок між симетричними білінійними та квадратичними функціоналами, алгоритм Лагранжа діагоналізації квадратичних функціоналів, канонічний вигляд квадратичних функціоналів над полями дійсних та комплексних чисел, додатно визначені квадратичні форми.
- ✓ Властивості та приклади просторів зі скалярним добутком.
- ✓ Спектральну теорему для нормальних операторів в ермітовому просторі. Властивості самоспряжених та унітарних операторів в ермітовому просторі. Канонічний вигляд нормального оператора в евклідовому просторі. Класифікацію ортогональних операторів.

уміти:

- ✓ Розв'язувати системи лінійних рівнянь.
- ✓ Обчислювати визначники.
- ✓ Обчислювати координати вектора у даному базисі.
- ✓ Знаходити базис та розмірність підпростору лінійного простору.
- ✓ Знаходити базис та розмірність суми та перетину лінійних просторів.
- ✓ Обчислювати ранг матриці.
- ✓ Перевіряти, чи є сума підпросторів прямою сумою, та знаходити проєкції вектора на прямі складники.
- ✓ Знаходити матрицю лінійного оператора в даному базисі.
- ✓ Обчислювати ядро та образ лінійного оператора.
- ✓ Знаходити обернену матрицю.
- ✓ Знаходити власні вектори та власні значення лінійного оператора, приводити напівпростий оператор до діагонального вигляду.
- ✓ Виражати симетричний многочлен через основні симетричні многочлени.
- ✓ Знаходити жорданову форму лінійного оператора та відповідний базис.
- ✓ Приводити квадратичний функціонал до діагонального вигляду за допомогою алгоритму Лагранжа.
- ✓ Знаходити канонічний вид квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел.
- ✓ Перевіряти додатну визначеність квадратичної форми.
- ✓ Знаходити ортогональний та ортонормований базиси підпростору евклідова або ермітова простору.
- ✓ Знаходити ортогональне доповнення до підпростору евклідового або ермітового простору, обчислювати відповідні ортогональні проєкції.
- ✓ Знаходити базис діагоналізації нормального оператора в ермітовому просторі.
- ✓ Знаходити канонічний вид матриці нормального оператора в евклідовому просторі та відповідний базис.
- ✓ Приводити квадратичну форму в евклідовому просторі до головних осей.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні **загальні компетентності** :

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу, володіння культурою мислення;
- здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями, використовувати знання про сучасну природничу картину світу в освітній та професійній діяльності, застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- здатність використовувати основні методи, способи та засоби одержання, зберігання, переробки

інформації;

- здатність працювати з комп'ютером як засобом управління інформацією.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні **фахові компетентності** :

- володіння основними положеннями класичних розділів математики, її базовими ідеями та методами;
- здатність здійснювати логічний аналіз математичних об'єктів і процедур та конкретизацію абстрактних математичних знань у процесі вивчення математики;
- володіння культурами математичного мислення, логічною, алгоритмічною та евристичною; розуміння загальної структури математичного знання, взаємозв'язку між різними математичними дисциплінами; здатність користуватися мовою математики, коректно виражати та аргументовано обґрунтовувати наявні знання;
- здатність будувати математичні моделі для вирішення практичних проблем; розуміння критеріїв якості математичного моделювання;
- здатність застосовувати різні сценарії вивчення конкретного математичного матеріалу, накопичувати та систематизувати різні варіанти доказів теорем, розв'язків задач, банків ключових задач тощо;
- володіння основними положеннями історії розвитку математики, еволюції математичних ідей та основними концепціями сучасної математичної науки.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні **ПРН**:

- Знати основні поняття та теореми теорії чисел, лінійної та абстрактної алгебри: лінійні простори та відображення, системи лінійних рівнянь, поліноми, групи. Уміти досліджувати алгебраїчні об'єкти та використовувати їх у теоретичних та практичних задачах. Володіти методами алгебри і теорії чисел.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Семестр 2

Розділ 1. Системи лінійних рівнянь, визначники та матриці

Тема 1. Системи лінійних рівнянь та визначники

1. Системи лінійних рівнянь. Матричний запис систем лінійних рівнянь. Алгоритм Гауса.
2. Підстановки.
3. Визначники. Алгоритм Гауса для обчислення визначника. Розкладання визначника за рядком (стовпцем).
4. Визначник Вандермонда.
5. Визначники Якобі. Лінійні однорідні рекурентні рівняння.
6. Теорема Лапласа.
7. Теорема єдиності визначника.

Тема 2. Дії з матрицями

1. Операції над матрицями.
2. Визначник добутку матриць.
3. Обернена матриця. Умови існування оберненої матриці. Обчислення оберненої матриці.
4. Формули Крамера.

Розділ 2. Лінійні простори та лінійні відображення

Тема 3. Лінійні простори

1. Визначення та найпростіші властивості лінійних просторів. Приклади лінійних просторів.
2. Лінійна незалежність та повнота системи векторів. Скінченновимірність. Базис тарозмірність лінійного простору. Класифікація скінченновимірних лінійних просторів.
3. Лінійна оболонка системи векторів. Розмірність лінійної оболонки.
4. Сума та перетин підпросторів. Формула Грасмана.
5. Ранг матриці. Теорема про ранг. Застосування до теорії систем лінійних рівнянь.
6. Пряма сума підпросторів. Пряме оповнення.

Тема 4. Лінійні відображення

1. Означення лінійного відображення. Елементарні властивості та приклади.
2. Факторпростір.
3. Теорема Ньотер для лінійних відображень. Розмірність ядра та образу лінійного відображення.
4. Лінійні функціонали. Спряжений простір. Теорія двоїстості.
5. Зв'язок між лійними відображеннями та матрицями. Визначник добутку матриць.
6. Обернена матриця.
7. Матриця переходу. Залежність матриці лінійного відображення від вибору базисів. Інваріантні підпростори. Власні вектори та власні значення лінійного оператора. Напівпрості лінійні оператори
8. Теорема Ньотер для лінійних відображень. Розмірність ядра та образу лінійного відображення.
9. Лінійні функціонали. Спряжений простір. Теорія двоїстості.
10. Зв'язок між лійними відображеннями та матрицями. Визначник добутку матриць.
11. Обернена матриця.
12. Матриця переходу. Залежність матриці лінійного відображення від вибору базисів.
13. Інваріантні підпростори. Власні вектори та власні значення лінійного оператора. Напівпрості лінійні оператори.

Семестр 3

Розділ 1. Многочлени декількох змінних

1. Кільце многочленів від декількох змінних. Відсутність дільників нуля. Лема Гауса. Розкладання на незвідні множники.
2. Лексикографічний запис многочлена від декількох змінних. Симетричні многочлени. Основна теорема про симетричні многочлени. Формули Ньютона.

Розділ 2. Жорданова форма лінійного оператора

1. Кореневі підпростори лінійного оператора. Жорданова форма лінійного оператора.
2. Функції від лінійного оператора.
3. Централізатор лінійного оператора. Теорема про подвійний централізатор.

Розділ 3. Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком

1. Білінійні та квадратичні функціонали, зв'язок між ними.
2. Алгоритм Лагранжа діагоналізації квадратичної форми. Канонічний вигляд квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел.
3. Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра.
4. Півторалінійні функціонали.
5. Простори із скалярним добутком, приклади та найпростіші властивості.
6. Алгоритм Грама-Шмідта побудови ортогонального базису.

7. Ортогональне доповнення та його властивості.

Розділ 4. Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком

1. Спектральна теорема для нормальних операторів в ермітовому просторі. Приклади: унітарні та самоспряжені оператори, їх власні значення.

2. Комплексифікація.

3. Канонічний вигляд матриці нормального оператора в евклідовому просторі.

Випадок самоспряженого та ортогонального операторів.

4. Полярне розкладання лінійного оператора.

5. Квадратичні форми в евклідовому просторі. Теорема про головні осі.

3. Структура навчальної дисципліни

Семестр 2

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Системи лінійних рівнянь, визначники та матриці												
Тема 1. Системи лінійних рівнянь та визначники	60	16	16			28						
Тема 2. Дії з матрицями	30	8	8			14						
Усього за розділом 1	90	24	24			42						
Розділ 2. Лінійні простори та лінійні відображення												
Тема 3. Лінійні простори	45	12	12			21						
Тема 4. Лінійні відображення	43	12	10			21						
Усього за розділом 2	88	24	22			42						
Контрольна робота	2		2									
Усього годин	180	48	48			84						

Семестр 3

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Многочлени декількох змінних	30	8*	8			14						
Розділ 2. Жорданова форма лінійного оператора	45	12*	12			21						
Розділ 3. Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком	60	16*	16			28						

Розділ 4. Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком	45	12*	12			21					
<i>Усього годин</i>	180	48	48			84					

*(За дистанційною формою, на платформі ZOOM.)

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

Семестр 2

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Системи лінійних рівнянь та визначники Системи лінійних рівнянь. Алгоритм Гауса. Підстановки. Визначники. Алгоритм Гауса для обчислення визначника. Розкладання визначника за рядком (стовпцем). Визначник Вандермонда. Визначники Якобі. Лінійні однорідні рекурентні рівняння. Теорема Лапласа.	16
2	Дії з матрицями Операції над матрицями. Обернена матриця. Формули Крамера.	8
3	Лінійні простори Лінійна незалежність та повнота системи векторів. Базис та розмірність лінійного простору. Лінійна оболонка системи векторів. Розмірність лінійної оболонки. Сума та перетин підпросторів. Формула Грасмана. Ранг матриці. Застосування до теорії систем лінійних рівнянь. Пряма сума підпросторів. Пряме доповнення.	12
4	Лінійні відображення Лінійні відображення. Елементарні властивості та приклади. Факторпростір. Розмірність ядра та образу лінійного відображення. Лінійні функціонали. Спряжений простір. Теорія двоїстості. Зв'язок між лінійними відображеннями та матрицями. Матриця переходу. Залежність матриці лінійного відображення від вибору базисів. Інваріантні підпростори. Власні вектори та власні значення лінійного оператора. Напівпрості лінійні оператори.	10
5	<i>Контрольна робота</i>	2
	Разом	48

Семестр 3

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Многочлени декількох змінних Симетричні многочлени.	8
2	Жорданова форма лінійного оператора Кореневі підпростори лінійного оператора. Жорданова форма лінійного оператора. Функції від лінійного оператора. Централізатор лінійного оператора. Розв'язання операторних та матричних рівнянь.	12
3	Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком Білінійні та квадратичні функціонали, зв'язок між ними. Алгоритм Лагранжа діагоналізації квадратичної форми. Канонічний вигляд квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел. Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра. Півторалінійні функціонали. Простори із скалярним добутком, приклади та найпростіші властивості. Алгоритм Грама-Шмідта побудови ортогонального базису. Ортогональне доповнення та його властивості.	14

4	Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком Спектральна теорема для нормальних операторів в ермітовому просторі. Унітарні та самоспряжені оператори. Канонічний вигляд матриці нормального оператора в евклідовому просторі. Випадок самоспряженого та ортогонального операторів. Полярне розкладання лінійного оператора. Квадратичні форми в евклідовому просторі. Теорема про головні осі.	12
5	Контрольна робота.	2
	Разом	48

5. Завдання для самостійної роботи

Семестр 2

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Розв'язання задач з домашнього завдання за темами:	
1	Системи лінійних рівнянь та визначники	28
2	Дії з матрицями	14
3	Лінійні простори	21
4	Лінійні відображення	21
	Разом	84

Семестр 3

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Робота над домашніми завданнями протягом семестру, що відповідають темам практичних занять:	
1	Многочлени декількох змінних	14
2	Жорданова форма лінійного оператора	21
3	Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком (Домашнє завдання)	28
4	Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком (Домашнє завдання)	21
	Разом	84

6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом.

3.Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

7. Методи контролю

Семестр 2

- поточний семестровий (контрольна робота - 1);
- підсумковий семестровий (екзамен).

Семестр 3

- поточний семестровий (контрольна робота - 1);
- підсумковий семестровий (екзамен).

8. Схема нарахування балів

Семестр 2

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання					Екзамен/Залік	Сума
Розділ 1		Розділ 2		контрольні роботи, передбачені навчальним планом	Разом	
T1	T2	T1	T2			
10	10	10	10	20	60	100

Семестр 3

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання					Екзамен/Залік	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Розділ 4	контрольні роботи, передбачені навчальним планом	Разом	
10	10	10	10	20	60	100

9. Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка		Пояснення
в балах	за національною шкалою	
90–100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70–89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50–69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань містять помилки, робота з трьома значними помилками.

1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки.
------	--------------	---

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90–100	відмінно	зараховано
70–89	добре	
50–69	задовільно	
1–49	незадовільно	не зараховано

10. Рекомендована література

Основна література

1. В. І. Андрійчук, Б. В. Забавський. Лінійна алгебра. – Львів, 2008.
2. E. Vinberg. A Course in Algebra. – AMS, 2003.
3. В. С. Мазорчук. Жорданова нормальна форма. – Київ, 1998.

Допоміжна література

1. О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська. Навчальний посібник з лінійної алгебри. – Київ, 2019.
2. О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри. – Київ, 2016.
3. A. Kurosh. Higher Algebra. – Mir, 1972.
4. I. V. Proskuryakov. Problems in Linear Algebra. – Mir, 1978.
5. A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin. Linear Algebra and Geometry. – Gordon and Breach, 1997
6. S. Lang. Algebra. – Springer, 2002.
7. A. I. Kostrikin. Introduction to algebra. – Springer, 1982.