Е. А. Каролинский

Представления полупростых алгебр Ли

Харьков – 2008

УДК 512.815.1 (075.8)
ББК 22.144 Я 73
К 25

Утверждено Научно-методическим советом
механико-математического факультета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол №2 від 22 грудня 2007 року)

Рецензенты:
профессор кафедры теории функций и функционального анализа ХНУ, доктор физ.-мат. наук Б. В. Новиков,
доцент кафедры математического анализа ХНУ, канд. физ.-мат. наук С. Л. Гефтер

Каролинский Е. А.
Представления полупростых алгебр Ли: Учебно-методическое пособие для студентов математических специальностей университетов. — Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2008. — 47 с.

Настоящее пособие составлено для одноименного семестрового спецкурса. Целью является овладение основами теории представлений комплексных полупростых алгебр Ли. Излагаются следующие темы: теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта, строение и классификация простых конечномерных модулей в терминах старших весов, формула Вейля для характера, строение центра универсальной обертывающей алгебры и описание центральных характеров. Предполагается знание основ теории алгебр Ли, включая строение комплексных полупростых алгебр Ли (см., например, Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли, часть 1, главы 1, 5 и 6; часть 3, глава 3 – 6).

УДК 512.815.1 (075.8)
ББК 22.144 Я 73

1. Универсальная обертывающая алгебра

Пусть $\mathfrak{g}$ — (конечномерная) алгебра Ли над полем $\Bbbk$. (Можно считать, что $\Bbbk = \mathbb{C}$.)

Определение 1. *Универсальная обертывающая алгебра* для $\mathfrak{g}$ — это унитальная (т.е. с единицей) ассоциативная алгебра $U\mathfrak{g}$ вместе с гомоморфизмом алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}^{(-)}$, причем для пары $(U\mathfrak{g}, \varphi)$ выполнено следующее свойство универсальности: для всякой унитальной ассоциативной алгебры A и гомоморфизма алгебр Ли $f : \mathfrak{g} \to A^{(-)}$ существует единственный гомоморфизм унитальных ассоциативных алгебр $\tilde{f} : U\mathfrak{g} \to A$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & U\mathfrak{g}^{(-)} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & A^{(-)} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Замечание 1. 1) Если $\tilde{f} : U\mathfrak{g} \to A$ — гомоморфизм унитальных ассоциативных алгебр, то $\tilde{f}$ автоматически является гомоморфизмом алгебр Ли $U\mathfrak{g}^{(-)} \to A^{(-)}$. Тем самым утверждение из свойства универсальности имеет смысл.

2) По свойству универсальности, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, A^{(-)}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ass}}(U\mathfrak{g}, A)$ для любой унитальной ассоциативной алгебры A. Точнее, взятие композиции с φ определяет изоморфизм линейных пространств $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ass}}(U\mathfrak{g}, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, A^{(-)})$.

3) В частности, пусть $A = \mathrm{End}\, V$, где V — линейное пространство. Тогда $A^{(-)} = \mathfrak{gl}(V)$, и $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(V)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ass}}(U\mathfrak{g}, \mathrm{End}\, V)$. Иными словами, задать в пространстве V структуру $\mathfrak{g}$-модуля — это то же самое, что задать в V структуру $U\mathfrak{g}$-модуля.

4) Пара $(U\mathfrak{g}, \varphi)$ является универсальным (отталкивающим) объектом в соответствующей категории (какой?). Поэтому универсальная обертывающая алгебра единственна с точностью до канонического изоморфизма. Точнее, если пары $((U\mathfrak{g})_1, \varphi_1)$ и $((U\mathfrak{g})_2, \varphi_2)$ удовлетворяют условиям определения 1, то существует единственный изоморфизм унитальных ассоциативных алгебр $(U\mathfrak{g})_1 \to (U\mathfrak{g})_2$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & (U\mathfrak{g})_1^{(-)} \arrow[d] \\ & (U\mathfrak{g})_2^{(-)} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Докажем, что универсальная обертывающая алгебра существует. Для этого нам понадобится понятие тензорной алгебры.

Пусть V — линейное пространство. Положим $T^n(V) = V^{\otimes n}$. В частности, $T^0(V) = \Bbbk$ (по определению), $T^1(V) = V$. Пусть $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V)$. Пространство $T(V)$ является ассоциативной алгеброй относительно *тензорного умножения* (обозначаемого $\otimes$), т.е.

$$\otimes : (v_1 \otimes \ldots \otimes v_m, w_1 \otimes \ldots \otimes w_n) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_n.$$

Отметим, что $T^m(V) \otimes T^n(V) = T^{m+n}(V)$, т.е. $T(V)$ — градуированная алгебра.

Упражнение 1. Проверьте, что умножение в $T(V)$ ассоциативно.

Отметим, что если $\alpha \in \Bbbk = T^0(V)$, $v \in T(V)$, то $\alpha \otimes v = \alpha v$. В частности, $1 \in \Bbbk$ — единица алгебры $T(V)$.

Алгебра $T(V)$ называется *тензорной алгеброй* пространства V.

Предложение 1 (свойство универсальности тензорной алгебры). *Обозначим через i естественное вложение $V = T^1(V)$ в $T(V)$. Тогда для всякой унитальной ассоциативной алгебры A и линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный гомоморфизм унитальных ассоциативных алгебр $\bar{f} : T(V) \to A$ такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & T(V) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Единственность: ясно, что с необходимостью $\bar{f}(1) = 1$, $\bar{f}(v) = f(v)$, $\bar{f}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f(v_1) \ldots f(v_n)$.

Существование: определим теперь $\bar{f}$ этими формулами. Проверка того, что это гомоморфизм, тривиальна. Для проверки корректности определения можно, например, считать, что v_i берутся из фиксированного базиса в V. $\square$

Замечание 2. Если $\dim V = n$, то алгебру $T(V)$ называют еще *свободной унитальной ассоциативной алгеброй с n образующими.*

Теперь построим $U\mathfrak{g}$. В качестве "первого приближения" возьмем тензорную алгебру $T(\mathfrak{g})$. Она, конечно, не подходит на роль $U\mathfrak{g}$, ибо $i : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$ не является гомоморфизмом алгебр Ли (в самом деле, если $x, y \in \mathfrak{g}$, то $[x, y] \in T^1(\mathfrak{g})$ и $x \otimes y - y \otimes x \in T^2(\mathfrak{g})$ — разные вещи). Исправим положение: рассмотрим двусторонний идеал (что это?) $J \subset T(\mathfrak{g})$, порожденный всеми элементами $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, где $x, y \in \mathfrak{g}$. Рассмотрим факторалгебру $U\mathfrak{g} = T(\mathfrak{g})/J$. Пусть $\varphi : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ — это композиция вложения $i : \mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})$ и факторотображения $j : T(\mathfrak{g}) \to U\mathfrak{g}$. Отметим, что φ по построению является гомоморфизмом алгебр Ли.

Предложение 2. *Пара $(U\mathfrak{g}, \varphi)$, построенная выше, обладает свойством универсальности из определения 1.*

Доказательство. Пусть A — унитальная ассоциативная алгебра, и $f : \mathfrak{g} \to A^{(-)}$ — гомоморфизм алгебр Ли. Единственность искомого гомоморфизма $\tilde{f}$ следует из того, что $U\mathfrak{g}$ (как алгебра) порождена 1 и $\varphi(\mathfrak{g})$. Докажем существование $\tilde{f}$. По свойству универсальности $T(\mathfrak{g})$, имеется гомоморфизм унитальных ассоциативных алгебр $\bar{f} : T(\mathfrak{g}) \to A$, продолжающий f. Отметим, что $\bar{f}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x) - f([x, y]) = [f(x), f(y)] - f([x, y])$. Поэтому $f(J) = 0$. Таким образом, $\bar{f}$ индуцирует гомоморфизм $\tilde{f} : U\mathfrak{g} \to A$, $\tilde{f}(j(u)) = \tilde{f}(u + J) = \bar{f}(u)$. Проверим, что он — искомый. В самом деле, если $x \in \mathfrak{g}$, то $\tilde{f}(\varphi(x)) = \tilde{f}(j(i(x))) = \bar{f}(i(x)) = f(x)$. $\square$

Умножение в построенной таким образом алгебре $U\mathfrak{g}$ принято обозначать "обычным" образом, т.е. $(u+J)(v+J) = u \otimes v + J$.

Пример 1. Пусть V — линейное пространство. Наделим его нулевой структурой алгебры Ли. Тогда идеал J из конструкции универсальной обертывающей алгебры порожден элементами $x \otimes y - y \otimes x$, где $x, y \in V$. Алгебра $T(V)/J$ в этом случае называется *симметрической алгеброй* пространства V и обозначается $S(V)$. Очевидно, $S(V)$ коммутативна. Заметим, что в этом случае (в отличие от общего) идеал J *однороден*, т.е. $J = \bigoplus_n J_n$, где $J_n = J \cap T^n(V)$ (например, $J_0 = J_1 = 0$, $J_2 = \mathrm{span}\{x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in V\}$, $J_3 = \mathrm{span}\{x \otimes y \otimes z - y \otimes x \otimes z, x \otimes y \otimes z - x \otimes z \otimes y \mid x, y, z \in V\}$, и т. п.). Поэтому $S(V)$ наследует градуировку из $T(V)$, т.е. $S(V) = \bigoplus_n S^n(V)$, где $S^n = T^n(V)/J_n$.

Упражнение 2. Если $\dim V = n$, то $S(V)$ изоморфна алгебре многочленов от n переменных (указание: выберите базис в V и с его помощью постройте базис во всех $S^n(V)$).

Отметим, что если поле $\Bbbk$ бесконечно, то $S(V)$ можно канонически отождествить с алгеброй полиномиальных функций на двойственном пространстве V^*: именно, значение $f = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n + J_n \in S^n(V)$ на элементе $l \in V^*$ — это $\langle v_1, l \rangle \cdot \ldots \cdot \langle v_n, l \rangle$.

Итак, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ абелева, то $U\mathfrak{g} = S(\mathfrak{g})$.

Упражнение 3. Проверьте следующее свойство универсальности симметрической алгебры: для всякой унитальной ассоциативной коммутативной алгебры A и линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный гомоморфизм унитальных ассоциативных алгебр $\tilde{f} : S(V) \to A$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & S(V) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

коммутативна. (Конечно, это частный случай свойства универсальности для универсальной обертывающей алгебры — почему?)

В общем случае идеал J не является однородным, поэтому $U\mathfrak{g}$ не имеет естественной градуировки. Однако $U\mathfrak{g}$ наделена естественной фильтрацией. Именно, положим $U_n\mathfrak{g}$ = образ $\bigoplus_{k=0}^n T^k(\mathfrak{g})$ при естественном отображении $j : T(\mathfrak{g}) \to U\mathfrak{g}$. Иными словами, $U_n\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_k) \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}, 0 \le k \le n\}$. Тогда $U_0\mathfrak{g} \subset U_1\mathfrak{g} \subset \ldots \subset U_n\mathfrak{g} \subset \ldots$, и $U\mathfrak{g} = \bigcup_n U_n\mathfrak{g}$. Кроме того, $U_k\mathfrak{g} \cdot U_l\mathfrak{g} \subset U_{k+l}\mathfrak{g}$ — это означает, что $U\mathfrak{g}$ — фильтрованная алгебра.

Построим базис в $U\mathfrak{g}$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — базис в $\mathfrak{g}$. Положим $y_i = \varphi(x_i)$.

Теорема 3 (Пуанкаре-Биркгоф-Витт). *Элементы $y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_n^{k_n}$ (где $k_i \in \mathbb{Z}_+$) образуют базис в $U\mathfrak{g}$.*

Будем называть базис из этой теоремы ПБВ-базисом в $U\mathfrak{g}$ (построенным по данному базису в $\mathfrak{g}$).

Следствие 4. *Отображение $\varphi : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ является вложением.* □

Замечание 3. Принято отождествлять $\mathfrak{g}$ с $\varphi(\mathfrak{g}) \subset U\mathfrak{g}$, т.е. считать, что $\mathfrak{g} \subset U\mathfrak{g}$ (и не писать φ).

Пример 2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. Рассмотрим стандартный базис Y, H, X в $\mathfrak{sl}(2)$; напомним, что $[X, Y] = H$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$. По теореме ПБВ, базис в $U\mathfrak{sl}(2)$ образуют элементы $Y^k H^l Y^m$, где $k, l, m \in \mathbb{Z}_+$. Как разложить, скажем, XHY по этому базису? А вот как: $XHY = X(YH+[H,Y]) = XYH-2XY = XY(H-2) = (YX+[X,Y])(H-2) = \ldots = YHX - 4YX + H^2 - 2H$.

Отметим, что это рассуждение имеет весьма общий характер и, по существу, доказывает полноту ПБВ-системы (формальное доказательство будет позже). Ее линейная независимость — гораздо более тонкий вопрос.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы ПБВ, обсудим ее важные следствия.

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда $U\mathfrak{h}$ канонически вкладывается в $U\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Рассмотрим тождественное вложение $f : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$. По свойству универсальности, f продолжается до гомоморфизма ассоциативных алгебр $\tilde{f} : U\mathfrak{h} \to U\mathfrak{g}$. Выберем базис $x_1, \ldots, x_n$ в $\mathfrak{h}$ и рассмотрим соответствующий ПБВ-базис $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ в $U\mathfrak{h}$. Так как $\tilde{f}(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}) = \tilde{f}(x_1^{k_1}) \ldots \tilde{f}(x_n^{k_n}) = f(x_1^{k_1}) \ldots f(x_n^{k_n}) = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, то $\tilde{f}$ переводит базис в $U\mathfrak{h}$ в линейно независимую систему в $U\mathfrak{g}$, т.е. $\tilde{f}$ — вложение. □

Замечание 4. 1) В ситуации следствия 1. мы будем считать, что $U\mathfrak{h}$ — подалгебра в $U\mathfrak{g}$.

2) Подалгебра $U\mathfrak{h} \subset U\mathfrak{g}$ порождена (как алгебра) 1 и $\mathfrak{h}$.

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — подалгебры в $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{b}$ (прямая сумма линейных пространств!). Тогда имеется канонический изоморфизм (линейных пространств) $U\mathfrak{g} \simeq U\mathfrak{a} \otimes U\mathfrak{b}$.*

Доказательство. Имеется билинейное отображение $U\mathfrak{a} \times U\mathfrak{b} \to U\mathfrak{g}$, $(a, b) \mapsto ab$. Оно индуцирует линейное отображение $U\mathfrak{a} \otimes U\mathfrak{b} \to U\mathfrak{g}$, $a \otimes b \mapsto ab$. Покажем, что это изоморфизм.

Выберем базисы $x_1, \ldots, x_m$ в $\mathfrak{a}$ и $y_1, \ldots, y_n$ в $\mathfrak{b}$ и построим по ним ПБВ-базисы $x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$ в $U\mathfrak{a}$ и $y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}$ в $U\mathfrak{b}$. Базисом в $U\mathfrak{a} \otimes U\mathfrak{b}$ будет $(x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}) \otimes (y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n})$. С другой стороны, $x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m} y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}$ — это ПБВ-базис, построенный по базису $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ в $\mathfrak{g}$. Итак, наше отображение переводит базис в базис. Значит, оно — изоморфизм. □

Для доказательства теоремы ПБВ полезно чуть-чуть ее переформулировать. Именно, рассмотрим упорядоченные наборы $I = (i_1, \ldots, i_k)$, где все $i_j \in \{1, \ldots, n\}$ (не исключен и случай $I = \varnothing$). Обозначим $|I| = k$. Назовем такой набор I *неубывающим*, если $i_1 \le \ldots \le i_k$. Положим $y_I = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$. Очевидно, теорема ПБВ равносильна тому, что элементы y_I, где I пробегает множество всех неубывающих наборов (любой длины), образуют базис в $U\mathfrak{g}$. Будем доказывать теорему ПБВ в этой формулировке.

Доказательство теоремы ПБВ. 1) Докажем полноту ПБВ-системы. Прежде всего заметим, что все y_I с $|I| \le k$ порождают $U_k\mathfrak{g}$ как линейное пространство. Покажем, что на самом деле для этого достаточно y_I с неубывающими I, $|I| \le k$.

Лемма 7. *Пусть $a_1, \ldots, a_k \in \mathfrak{g}$, $b_i = \varphi(a_i) \in U\mathfrak{g}$, $\sigma \in S_k$. Тогда $b_1 \ldots b_k - b_{\sigma(1)} \ldots b_{\sigma(k)} \in U_{k-1}\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma = (i, i+1)$ (ибо любая перестановка является произведением таких). Заметим, что $b_i b_{i+1} - b_{i+1} b_i = [b_i, b_{i+1}] = \varphi([a_i, a_{i+1}]) \in U_1\mathfrak{g}$. Поэтому $b_1 \ldots b_i b_{i+1} \ldots b_k - b_1 \ldots b_{i+1} b_i \ldots b_k \in U_{i-1}\mathfrak{g} \cdot U_1\mathfrak{g} \cdot U_{k-i-1}\mathfrak{g} \subset U_{k-1}\mathfrak{g}$. □

Теперь применим лемму 7 к иксам. Проведем индукцию по k. При $k = 0, 1$ доказывать нечего. Проведем индуктивный переход $k - 1 \rightsquigarrow k$. Для любого $I = (i_1, \ldots, i_k)$ найдется перестановка σ такая, что $\sigma I = (i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(k)})$ — неубывающий. Согласно лемме 7, $y_I \in y_{\sigma I} + (U\mathfrak{g})_{k-1}$, что и требовалось доказать.

2) Докажем линейную независимость ПБВ-системы. Для этого рассмотрим вспомогательное линейное пространство V с базисом Z_I, где I пробегает множество всех неубывающих наборов (любой длины). Если $I = (i_1, \ldots, i_k)$ неубывающий, $i \in \{1, \ldots, n\}$, то положим $i \le I$, если $i \le i_1$ (т.е. набор (i, I) также неубывающий). (Кроме того, мы считаем, что $i \le \varnothing$ для всех i.)

Лемма 8 (основная лемма к теореме ПБВ). *В пространстве V можно ввести структуру $\mathfrak{g}$-модуля такую, что $x_i Z_I = Z_{(i,I)}$ при $i \le I$ (иначе говоря, структуру $U\mathfrak{g}$-модуля такую, что $y_i Z_I = Z_{(i,I)}$ при $i \le I$).*

Выведем теорему ПБВ из основной леммы. Рассмотрим элемент $Z_\varnothing$. Если $I = (i_1, \ldots, i_k)$ — неубывающий набор, $y_I = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$, то $y_I Z_\varnothing = y_{i_1} \ldots y_{i_{k-1}} Z_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_{k-2}} Z_{(i_{k-1}, i_k)} = \ldots = Z_I$. Рассмотрим теперь соотношение вида $\sum_I c_I y_I = 0$ (где все I, входящие в сумму, неубывающие). Тогда $0 = \left(\sum_I c_I y_I\right) Z_\varnothing = \sum_I c_I Z_I$, поэтому все $c_I = 0$. □

Доказательство основной леммы. Положим $V_m = \operatorname{span}\{Z_I \,|\, |I| \le m\} \subset V$ (здесь $m = 0, 1, \ldots$). Кроме того, если набор I не является неубывающим, то будет удобно считать, что $Z_I = Z_{\sigma I}$, где σ — перестановка такая, что набор σI неубывающий.

Для каждого m мы построим билинейное отображение $\mathfrak{g} \times V_m \to V_{m+1}$, $(x, Z) \mapsto xZ$, со следующими свойствами:

$$(A_m) \qquad x_i Z_I = Z_{(i,I)} \text{ при } i \le I,\ |I| = m;$$

(B_m) $\qquad x_iZ_I - Z_{(i,I)} \in V_m$ при всех i и $|I| = m$;

(C_m) $\qquad x_ix_jZ_J = x_jx_iZ_J + [x_i, x_j]Z_J$ при всех i, j и $|J| = m - 1$.

Условие (C_m) отвечает за то, что так получается $\mathfrak{g}$-модуль, условие (A_m) — наше "главное" условие, условие (B_m) носит вспомогательный характер. Отметим, что если (B_m) выполнено, то $x_ix_jZ_J = Z_{(i,j,J)} +$ элемент из V_m, $x_jx_iZ_J = Z_{(j,i,J)} +$ элемент из $V_m = Z_{(i,j,J)} +$ элемент из V_m; поэтому $x_ix_jZ_J - x_jx_iZ_J \in V_m$, и условие (C_m) имеет смысл.

Разумеется, достаточно определить наше отображение при $x = x_i$, $Z = Z_I$ и продолжить его по линейности.

Будем вести индукцию по m. При $m = 0$ положим $x_iZ_\varnothing = Z_i$ для всех i. Тогда (A_0) и (B_0) выполнены по определению, а (C_0) бессодержательно.

Проведем индуктивный переход $m-1 \rightsquigarrow m$. Мы предполагаем, что для $m-1, m-2, \ldots$ нужные отображения уже определены. Построим требуемое отображение для m.

Итак, пусть $|I| = m$. Если $i \leq I$, то, разумеется, полагаем $x_iZ_I := Z_{(i,I)}$ (т.е. (A_m) выполнено по построению). Если же $i \not\leq I$, то запишем $I = (j, J)$, где $i > j$, $|J| = m - 1$, $j \leq J$. Тогда $Z_I = Z_{(j,J)} = x_jZ_J$ по условию (A_{m-1}). Определим $x_iZ_I = x_ix_jZ_J := x_jx_iZ_J + [x_i, x_j]Z_J$. Отметим, что правая часть этого равенства уже определена: во-первых, $[x_i, x_j]Z_J$ определено на предыдущем шаге; во-вторых, условие (B_{m-1}) означает, что $x_iZ_J = Z_{(i,J)} + W$, где $W \in V_{m-1}$, поэтому

$$x_jx_iZ_J = x_jZ_{(i,J)} + x_jW \overset{(A_m)}{=} Z_{(i,j,J)} + x_jW = Z_{(i,I)} + x_jW,$$

где x_jW определено на предыдущем шаге. Отметим еще, что $x_jW + [x_i, x_j]Z_J \in V_m$, т.е. (B_m) также выполнено по построению.

Будем проверять условие (C_m). Если $i > j$, $|J| = m - 1$, $j \leq J$, то (C_m) выполнено по построению. Если поменять здесь i и j ролями, то (C_m) тоже выполнено (ибо $[x_j, x_i] = -[x_i, x_j]$). При $i = j$ условие (C_m) тривиально. Итак, (C_m) верно, если $i \leq J$ или $j \leq J$. (Отметим, что при $m = 1$ это верно всегда, ибо $J = \varnothing$.)

В противном случае запишем $J = (k, K)$, где $|K| = m - 2$, $i > k$, $j > k$, $k \leq K$. Тогда

$$x_jZ_J \overset{(A_{m-2})}{=} x_jx_kZ_K \overset{(C_{m-1})}{=} x_kx_jZ_K + [x_j, x_k]Z_K,$$

и

$$x_ix_jZ_J = x_ix_kx_jZ_K + x_i[x_j, x_k]Z_K.$$

Упражнение 4. В выражении $x_ix_kx_jZ_K$ (соотв. $x_i[x_j, x_k]Z_K$) можно переставить x_i и x_k (соотв. x_i и $[x_j, x_k]$), пользуясь уже проверенными случаями условий типа (C_m); т.е. $x_ix_kx_jZ_K = x_kx_ix_jZ_K + [x_i, x_k]x_jZ_K$ и $x_i[x_j, x_k]Z_K = [x_j, x_k]x_iZ_K + [x_i, [x_j, x_k]]Z_K$.

Итак,

$$x_i x_j Z_J = x_k x_i x_j Z_K + [x_i, x_k] x_j Z_K + [x_j, x_k] x_i Z_K + [x_i, [x_j, x_k]] Z_K.$$

Аналогично (i и j сейчас равноправны),

$$x_j x_i Z_J = x_k x_j x_i Z_K + [x_j, x_k] x_i Z_K + [x_i, x_k] x_j Z_K + [x_j, [x_i, x_k]] Z_K.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x_i x_j Z_J - x_j x_i Z_J &= x_k(x_i x_j Z_K - x_j x_j Z_K) + [x_i, [x_j, x_k]] Z_K + [x_j, [x_k, x_i]] Z_K \overset{(C_{m-1})}{=} \\ &= x_k[x_i, x_j] Z_K + [x_i, [x_j, x_k]] Z_K + [x_j, [x_k, x_i]] Z_K = \\ &= x_k[x_i, x_j] Z_K - [x_k, [x_i, x_j]] Z_K = \\ &= x_k[x_i, x_j] Z_K + [[x_i, x_j], x_k] Z_K \overset{(C_{m-1})}{=} \\ &= [x_i, x_j] x_k Z_K \overset{(A_{m-2})}{=} [x_i, x_j] Z_J. \end{aligned}$$

Вот и все. □

Обсудим вкратце еще одну эквивалентную формулировку теоремы ПБВ.

Пусть A — унитальная ассоциативная алгебра с фильтрацией, т.е. $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_n \subset A$ — подпространства, $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, и $A_k A_l \subset A_{k+l}$. Рассмотрим линейное пространство $\operatorname{gr} A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n$, где $A^n := A_n / A_{n-1}$ (здесь считается, что $A_{-1} = 0$). Введем в нем структуру алгебры следующим образом: $(x + A_{k-1})(y + A_{l-1}) = xy + A_{k+l-1}$ (здесь $x \in A_k$, $y \in A_l$).

Упражнение 5. Проверьте корректность этого определения и то, что $\operatorname{gr} A$ с этим умножением является унитальной ассоциативной *градуированной* (т.е. $A^k A^l \subset A^{k+l}$) алгеброй.

Алгебра $\operatorname{gr} A$ называется *градуированной алгеброй, присоединенной к A.*

Рассмотрим теперь алгебру $U\mathfrak{g}$ с ее канонической фильтрацией.

Упражнение 6. Алгебра $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ коммутативна. (Конечно, это равносильно лемме 7.)

Рассмотрим естественное линейное отображение $\mathfrak{g} \to \operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ (именно, композицию $\mathfrak{g} \hookrightarrow U_1\mathfrak{g} \to U_1\mathfrak{g}/U_0\mathfrak{g} \hookrightarrow \operatorname{gr} U\mathfrak{g}$). Так как $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ коммутативна, то по свойству универсальности для симметрической алгебры это отображение продолжается до гомоморфизма алгебр $S(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr} U\mathfrak{g}$.

Задача 7. Теорема ПБВ равносильна тому, что это отображение является изоморфизмом.

2. Весовое разложение простого модуля

Начиная с этого места, будем предполагать, что $\mathfrak{g}$ — (конечномерная) полупростая алгебра Ли, и что основное поле — это $\mathbb{C}$.

Зафиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{g}$ вида $\langle \cdot, \cdot \rangle = cK_{\mathfrak{g}}(\cdot, \cdot)$, где $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Пусть $R \subset \mathfrak{h}^*$ — множество корней $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, и $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha\right)$ — соответствующее корневое разложение. Напомним, что R является системой корней в евклидовом (относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пространстве $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} R$. Выберем и зафиксируем подмножество положительных корней $R_+ \subset R$, и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — простые корни, соответствующие этому выбору (здесь $r = \dim \mathfrak{h} = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$). Положим $\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\alpha \in R_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$. Заметим, что $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ — нильпотентные подалгебры в $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ (прямая сумма подпространств). Подпространства $\mathfrak{b}_\pm = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_\pm$ являются разрешимыми подалгебрами в $\mathfrak{g}$. Наконец, обозначим через W группу Вейля системы корней R.

Напомним, что для каждого $\alpha \in R$ существует единственный элемент $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$ такой, что $\alpha(H_\alpha) = 2$. Нетрудно проверить, что $H_\alpha = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ при отождествлении $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$ с помощью $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Элементы $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ тоже образуют систему корней в пространстве $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ (она обозначается через $R^\vee$ и называется *двойственной* к R; ее элементы часто называются *кокорнями*). Для краткости положим $H_i = H_{\alpha_i}$. Элементы $H_1, \ldots, H_r$ образуют базис в $\mathfrak{h}$ (на самом деле они являются простыми кокорнями при подходящем выборе положительных корней в $R^\vee$).

Для каждого $\alpha \in R_+$ выберем элементы $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ и $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ так, чтобы $\langle X_\alpha, Y_\alpha \rangle = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. Наборы X_α и Y_α (как-нибудь упорядоченные) образуют базис в $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ соответственно. Кроме того, $\mathfrak{sl}(2)_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, изоморфная $\mathfrak{sl}(2)$; элементы X_α, Y_α, H_α образуют "стандартный" (т.е. $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$, $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$, $[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$) базис в ней. Положим для краткости $X_i = X_{\alpha_i}$, $Y_i = Y_{\alpha_i}$ и $\mathfrak{sl}(2)_i = \mathfrak{sl}(2)_{\alpha_i}$.

Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Положим

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \forall\, h \in \mathfrak{h} : hv = \lambda(h)v\}$$

(т.е. подпространство $V_\lambda \subset V$ состоит из общих собственных векторов всех операторов представления, отвечающих элементам из $\mathfrak{h}$, с собственным значением λ).

Пример 3. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$, где $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Задание линейного функционала $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ равносильно заданию числа $\Lambda = \lambda(H) \in \mathbb{C}$. При этом

$$V_\lambda = \{v \in V \mid Hv = \Lambda v\}.$$

Предложение 9. *Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$.*

Доказательство. Если $h \in \mathfrak{h}$, то h полупрост, а тогда и отвечающий ему оператор представления полупрост. Итак, операторы представления, отвечающие элементам

$h \in \mathfrak{h}$, — это семейство попарно коммутирующих полупростых линейных операторов в пространстве V. Но тогда в пространстве V имеется базис из общих собственных векторов всех этих операторов. Это и означает, что $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$. $\square$

Элементы пространства $\mathfrak{h}^*$ в этом контексте принято называть *весами*. Принято говорить, что $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ — это *весовое разложение* $\mathfrak{g}$-модуля V (относительно $\mathfrak{h}$). Будем также говорить, что вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ является *весом* $\mathfrak{g}$*-модуля* V (или *входит* в V), если $V_\lambda \neq 0$. *Кратность* веса λ в $\mathfrak{g}$-модуле V — это $\dim V_\lambda$.

Пусть снова V — $\mathfrak{g}$-модуль, пусть $\alpha \in R$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Лемма 10. *Если $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v \in V_\lambda$, то $xv \in V_{\lambda+\alpha}$ (т.е. $\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$).*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v \in V_\lambda$, т.е. $[h, x] = \alpha(h)x$, $hv = \lambda(h)v$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Тогда $h(xv) = x(hv) + [h, x]v = \lambda(h)xv + \alpha(h)xv$, что и требовалось доказать. $\square$

Определение 2. Вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ называется *целочисленным* (соотв. *доминантным*), если $\lambda(H_i) \in \mathbb{Z}$ (соотв. $\lambda(H_i) \in \mathbb{Z}_+$) при всех $i = 1, \dots, r$.

Предложение 11. *Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда все веса, входящие в V, являются целочисленными.*

Доказательство. По предложению 9, $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$, где $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ пробегает множество весов, входящих в V. Рассмотрим V как $\mathfrak{sl}(2)$-модуль с помощью вложения $\mathfrak{sl}(2) \simeq \mathfrak{sl}(2)_i \subset \mathfrak{g}$. Весами этого $\mathfrak{sl}(2)$-модуля являются числа $\lambda(H_i)$. По свойствам конечномерных $\mathfrak{sl}(2)$-модулей, все эти числа являются целыми. Так как i произвольно, то это означает целочисленность λ. $\square$

Замечание 5. 1) Заметим, что $\lambda(H_i) = \frac{2\langle\lambda,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$. Т.е. вес λ является целочисленным (соотв. доминантным), если $\frac{2\langle\lambda,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} \in \mathbb{Z}$ (соотв. $\frac{2\langle\lambda,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} \in \mathbb{Z}_+$) при всех $i = 1, \dots, r$. В частности, все корни являются целочисленными весами. Кроме того, все целочисленные веса лежат в $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$.

2) Отметим, что условие целочисленности (в отличие от условия доминантности!) веса не зависит от выбора положительных корней, ибо если $\lambda(H_i) \in \mathbb{Z}$ для всех $i = 1, \dots, r$, то $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in R$ (почему?).

3) Обозначим через P (соотв. P_+) множество всех целочисленных (соотв. доминантных) весов. Очевидно, что P — подгруппа в $\mathfrak{h}^*$. Более того, $P = \mathbb{Z}\varpi_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\varpi_r$, где веса $\varpi_1, \dots, \varpi_r$ образуют базис в $\mathfrak{h}^*$, двойственный базису $H_1, \dots, H_r$ в $\mathfrak{h}$ (т.е. $\varpi_j(H_i) = \frac{2\langle\varpi_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = \delta_{ij}$). Веса $\varpi_1, \dots, \varpi_r$ называются *фундаментальными*, а P называется *решеткой весов*. Множество $P_+ = \mathbb{Z}_+\varpi_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_+\varpi_r$ является подполугруппой в P.

4) Обозначим через C множество всех (т.е. не обязательно целочисленных) весов $\lambda \in \mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$, таких, что $\lambda(H_i) \geq 0$ при всех $i = 1, \dots, r$. Ясно, что

$$C = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*_\mathbb{R} \mid \langle\lambda, \alpha_1\rangle \geq 0, \dots, \langle\lambda, \alpha_r\rangle \geq 0\}.$$

Подмножество $C \subset \mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ является выпуклым конусом, ограниченным гиперплоскостями $\langle\lambda, \alpha_i\rangle = 0$; внутренность C называется *камерой Вейля* (отвечающей данному выбору положительных корней). Таким образом, $P_+ = P \cap C$.

Пример 4. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра всех диагональных матриц. Пусть

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$$

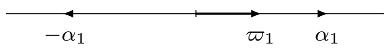
(в частности, $h_1 + \ldots + h_n = 0$). Определим $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ формулами $\varepsilon_i(h) = h_i$ (тогда $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 0$). Тогда

$$R = \{\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \,|\, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n, i \ne j\}.$$

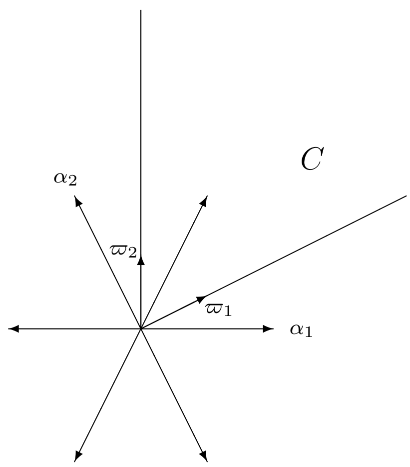
R — это система корней типа A_{n-1}. "Стандартный" набор простых корней образуют $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$, а соответствующими простыми кокорнями являются $H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$ (здесь E_{ij} — стандартные матричные единицы).

Пусть теперь $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Мы можем написать $\lambda = \sum_i m_i \varepsilon_i$, где числа m_i определены с точностью до замен вида $m_i \mapsto m_i + c$ (т.е. с точностью до прибавления общего слагаемого). Так как $\lambda(H_i) = m_i - m_{i+1}$, то целочисленность веса λ означает, что $m_i - m_{i+1} \in \mathbb{Z}$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$. Доминантность целочисленного веса λ означает, что $m_1 \ge m_2 \ge \ldots \ge m_n$. Легко вычислить и фундаментальные веса: $\varpi_1 = \varepsilon_1$, $\varpi_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, …, $\varpi_{n-1} = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} = -\varepsilon_n$.

В случае системы корней типа A_1 или A_2 (т.е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ или $\mathfrak{sl}(3)$) все нетрудно нарисовать на картинке. Если R — типа A_1, то ситуация особенно проста:



Если же R — типа A_2, то картинка следующая:



Упражнение 8. Нарисуйте подобные картинки для других неприводимых систем корней ранга 2 (т.е. для B_2 и G_2).

Предложение 12. *Пусть* $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$. *Тогда* $|(W\lambda) \cap C| = 1$.

Доказательство. В общем случае это нетрудно вывести из того факта, что группа Вейля действует на множестве всех систем простых корней (или, что то же самое, на множестве всех камер Вейля) просто транзитивно (т.е. транзитивно и без неподвижных точек). Детали см. Хамфри, §10.3 и §13.2.

Отметим, что в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ доказательство очевидно: в этом случае $W = S_n$ действует на $\mathfrak{h}^*$ перестановками $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Поэтому для каждого $\lambda = \sum_i m_i \varepsilon_i$ найдется перестановка $w \in S_n$ такая, что $m_{w(1)} \geq m_{w(2)} \geq \ldots \geq m_{w(n)}$, т.е. $w\lambda = \sum_i m_{w^{-1}(i)} \varepsilon_i \in C$, причем элемент $w\lambda \in C$ определен однозначно. $\square$

Следствие 13. *Каждый целочисленный вес действием группы Вейля можно перевести в доминантный; последний при этом определен однозначно.*

Доказательство. Достаточно заметить, что свойство целочисленности веса не нарушается при действии группы Вейля, и применить предложение 12. $\square$

Нам понадобится следующее отношение частичного порядка на множестве $\mathfrak{h}^*$: будем говорить, что $\lambda \geq \mu$, если $\lambda = \mu + \sum_i n_i \alpha_i$ для некоторых $n_i \in \mathbb{Z}_+$. Иными словами, $\lambda \geq \mu$, если $\lambda - \mu$ является суммой нескольких положительных корней.

Упражнение 9. Приведите пример ситуации, когда $\lambda \geq \mu$, $\mu \in P_+$, но $\lambda \notin P_+$.

Замечание 6. Пусть $Q = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\alpha_r$. Подгруппа $Q \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ называется *решеткой корней.* Мы уже отмечали, что $Q \subset P$. Ясно, что Q — подгруппа в $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, порожденная множеством R. Положим также $Q_+ = \mathbb{Z}_+\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_+\alpha_r$ (в отличие от Q и P_+, обозначение Q_+ не является общепринятым). В этих обозначениях $\lambda \geq \mu$ тогда и только тогда, когда $\lambda - \mu \in Q_+$.

Упражнение 10. Вычислите факторгруппу P/Q в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, т.е. R — типа A_{n-1} (ответ: $P/Q \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

Вернемся к $\mathfrak{g}$-модулям. По теореме Вейля о полной приводимости, каждый конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль является прямой суммой простых (и такое представление однозначно с точностью до изоморфизма). Поэтому для описания всех конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей достаточно описать простые конечномерные $\mathfrak{g}$-модули. Вот первый результат в этом направлении.

Теорема 14. *Пусть V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда среди весов, входящих в V, существует <u>наибольший</u> вес $\lambda = \lambda_V$. При этом*

(1) $\lambda \in P_+$ *(т.е. λ является доминантным);*

(2) $\dim V_\lambda = 1$*;*

(3) $V = (U\mathfrak{g})v$ *для любого $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$;*

(4) *элементы из V_λ характеризуются условием $\mathfrak{n}_+ v = 0$ (т.е. $X_\alpha v = 0$ для всех $\alpha \in R_+$);*

(5) $\dim V_{w\mu} = \dim V_\mu$ *для всех $w \in W$ и $\mu \in \mathfrak{h}^*$;*

(6) *если μ — вес V, то $\langle \mu, \mu \rangle \leq \langle \lambda, \lambda \rangle$, причем $\langle \mu, \mu \rangle = \langle \lambda, \lambda \rangle$ тогда и только тогда, когда $\mu \in W\lambda$.*

Замечание 7. Вес λ из теоремы 14 называется *старшим весом* $\mathfrak{g}$-модуля V. Произвольный ненулевой вектор из V_λ (он определен однозначно с точностью до умножения на ненулевой скаляр) называется *старшим вектором* $\mathfrak{g}$-модуля V.

Доказательство теоремы 14. Пусть λ — какой-нибудь из весов V, максимальный относительно "$\geq$". Если $\alpha \in R_+$, то $\lambda + \alpha \geq \lambda$, т.е. $\lambda + \alpha$ не является весом V. Поэтому $X_\alpha v = 0$ для всех $v \in V_\lambda$ (см. лемму 10).

Выберем какой-нибудь вектор $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$ и рассмотрим $L = (U\mathfrak{g})v$. Очевидно, L является подмодулем в V, и $L \neq 0$, поэтому $L = V$ ввиду простоты V. (Это рассуждение показывает, что на самом деле равенство $V = (U\mathfrak{g})v$ верно для <u>любого</u> вектора $v \in V$, $v \neq 0$.) Рассмотрим в $U\mathfrak{g}$ ПБВ-базис $Y_{\beta_1}^{q_1} \dots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \dots X_{\beta_k}^{p_k}$ (где $\beta_1, \dots, \beta_k$ — это все положительные корни, как-нибудь упорядоченные). Ясно, что все векторы $Y_{\beta_1}^{q_1} \dots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \dots X_{\beta_k}^{p_k} v$ порождают V как линейное пространство. Заметим, что $Y_{\beta_1}^{q_1} \dots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \dots X_{\beta_k}^{p_k} v = 0$ при условии, что хоть одно из чисел p_j отлично от нуля, а векторы $Y_{\beta_1}^{q_1} \dots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} v$ являются весовыми с весом $\lambda - \sum_j q_j \beta_j$ (см. лемму 10). Таким образом, все веса V имеют вид $\lambda - \sum_j q_j \beta_j$, т.е. лежат в множестве $\lambda - Q_+$. Следовательно, λ является наибольшим среди весов, входящих в V.

Кроме того, вектор $Y_{\beta_1}^{q_1} \dots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} v$ имеет вес λ тогда и только тогда, когда $q_j = 0$ для всех j; в этом случае $H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} v = cv$, где $c \in \mathbb{C}$. Этим доказано, что $\dim V_\lambda = 1$.

Итак, мы доказали, что среди весов, входящих в V, существует наибольший, и заодно проверили (2), (3) и частично (4). Докажем остаток утверждения (4). Пусть вектор v таков, что $X_\alpha v = 0$ для всех $\alpha \in R_+$, но $v \notin V_\lambda$. Запишем $v = \sum_\mu v_\mu$, где $v_\mu \in V_\mu$. Отметим, что $X_\alpha v_\mu = 0$ для всех $\alpha \in R_+$ и μ (ибо в равенстве $\sum_\mu X_\alpha v_\mu = 0$ все слагаемые в левой части равенства имеют различные веса). Выберем среди весов μ таких, что $v_\mu \neq 0$, и отличных от λ (так как $v \notin V_\lambda$, то такие существуют) какой-нибудь максимальный элемент μ_0 и положим $v' = v_{\mu_0}$. Так как $X_\alpha v' = 0$ для всех $\alpha \in R_+$ и $V = (U\mathfrak{g})v'$, то, пользуясь ПБВ-базисом в $U\mathfrak{g}$, нетрудно проверить (см. выше), что все веса $\mathfrak{g}$-модуля V не превосходят μ_0. Но это противоречит тому, что λ — вес V (ибо $\lambda > \mu_0$).

Докажем (1). Выберем $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$ и для каждого $i = 1, \dots, r$ рассмотрим $\mathfrak{sl}(2)$-модуль $M = (U\mathfrak{sl}(2)_i)v$. Очевидно, M порождается как линейное пространство векторами $Y_i^q H_i^m X_i^p v$, причем $Y_i^q H_i^m X_i^p v = 0$ при $p > 0$, а $Y_i^q H_i^m v$ — вектор веса (в смысле теории $\mathfrak{sl}(2)$-модулей) $(\lambda - q\alpha_i)(H_i) = \lambda(H_i) - 2q$. Поэтому $\lambda(H_i)$ — наибольший вес $\mathfrak{sl}(2)$-модуля M, и из свойств весов конечномерных $\mathfrak{sl}(2)$-модулей (именно, из симметричности множества весов относительно нуля) следует, что $\lambda(H_i) \geq 0$. Таким образом, $\lambda \in P_+$.

Докажем (5). Поскольку группа Вейля W порождается отражениями s_α, то достаточно проверить, что $\dim V_{s_\alpha(\mu)} = \dim V_\mu$ для всех $\alpha \in R$. Конечно, можно считать, что $\alpha \in R_+$ (ибо $s_{-\alpha} = s_\alpha$). Рассмотрим $\theta_\alpha := \exp(X_\alpha)\exp(-Y_\alpha)\exp(X_\alpha) \in \operatorname{Aut} V$ (здесь под X_α и Y_α понимаются операторы представления, т.е. элементы алгебры $\operatorname{End} V$). Отметим, что операторы X_α и Y_α нильпотентны, т.е. вычисление экспоненты сводится к конечному суммированию. Мы докажем, что $\theta_\alpha(V_\mu) \subset V_{s_\alpha(\mu)}$; поскольку $s_\alpha^2 = 1$, то отсюда следует, что $\theta_\alpha(V_\mu) = V_{s_\alpha(\mu)}$, и (так как оператор θ_α невырожден) $\dim V_{s_\alpha(\mu)} = \dim V_\mu$.

Упражнение 11. Пусть $A, B \in \operatorname{End} V$. Докажите, что

$$\exp(A)B\exp(-A) = \exp(\operatorname{ad}_A)B := B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \ldots + \frac{1}{k!}\operatorname{ad}_A^k B + \ldots.$$

Пусть $h \in \mathfrak{h}$. Вычислим $\theta_\alpha^{-1} h \theta_\alpha \in \operatorname{End} V$. Пользуясь результатом упражнения 11, получаем последовательно, что

$$\exp(-X_\alpha)h\exp(X_\alpha) = h - [X_\alpha, h] = h + \alpha(h)X_\alpha,$$

$$\exp(Y_\alpha)(h + \alpha(h)X_\alpha)\exp(-Y_\alpha) = h - \alpha(h)H_\alpha + \alpha(h)X_\alpha,$$

$$\begin{aligned}\theta_\alpha^{-1} h\theta_\alpha &= \exp(-X_\alpha)(h - \alpha(h)H_\alpha + \alpha(h)X_\alpha)\exp(X_\alpha) = \\ &= h - \alpha(h)H_\alpha + \alpha(2h - \alpha(h)H_\alpha)X_\alpha = h - \alpha(h)H_\alpha\end{aligned}$$

(в последнем равенстве использовано то, что $\alpha(H_\alpha) = 2$).

Если $v \in V_\mu$, т.е. $hv = \mu(h)v$, то $h\theta_\alpha v = \theta_\alpha(h - \alpha(h)H_\alpha)v = (\mu - \mu(H_\alpha)\alpha)(h)\theta_\alpha v$. Но $\mu - \mu(H_\alpha)\alpha = \mu - \frac{2\langle\mu,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha = s_\alpha(\mu)$, т.е. $\theta_\alpha v \in V_{s_\alpha(\mu)}$.

Наконец, докажем (6). Пусть μ — вес V. Выберем $w \in W$ так, чтобы вес $w\mu$ был доминантным (см. следствие 13), т.е., в частности, $\langle w\mu, \alpha_i\rangle \geq 0$. Согласно утверждению (5) этой теоремы, $w\mu$ также является весом V, поэтому $w\mu = \lambda - \sum_i n_i\alpha_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle\lambda,\lambda\rangle &= \langle w\mu, w\mu\rangle + 2\sum_i n_i\langle w\mu,\alpha_i\rangle + \left\langle \sum_i n_i\alpha_i, \sum_i n_i\alpha_i\right\rangle \geq \\ &\geq \langle w\mu, w\mu\rangle + \left\langle \sum_i n_i\alpha_i, \sum_i n_i\alpha_i\right\rangle \geq \langle w\mu, w\mu\rangle = \langle\mu,\mu\rangle,\end{aligned}$$

причем равенство $\langle\lambda,\lambda\rangle = \langle\mu,\mu\rangle$ верно только при условии $\sum_i n_i\alpha_i = 0$, т.е. $\lambda = w\mu$. $\square$

Пример 5. Тривиальный одномерный $\mathfrak{g}$-модуль, конечно, прост, и его старший (и единственный) вес — это 0.

Пример 6. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. Рассмотрим тавтологическое представление $\mathfrak{g}$ в пространстве $V = \mathbb{C}^n$. Очевидно, оно неприводимо. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в V. Очевидно, что веса $\mathfrak{g}$-модуля V — это в точности $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, причем $V_{\varepsilon_k} = \mathbb{C}e_k$. Вес $\varepsilon_1 = \varpi_1$ является старшим. В старшинстве веса ε_1 можно убедиться или непосредственно, или заметить, что все остальные веса не являются доминантными, или отметить, что векторы $v \in V$, для которых $\mathfrak{n}_+ v = 0$, — это в точности векторы из V_{ε_1}, и применить утверждение (4) теоремы 14.

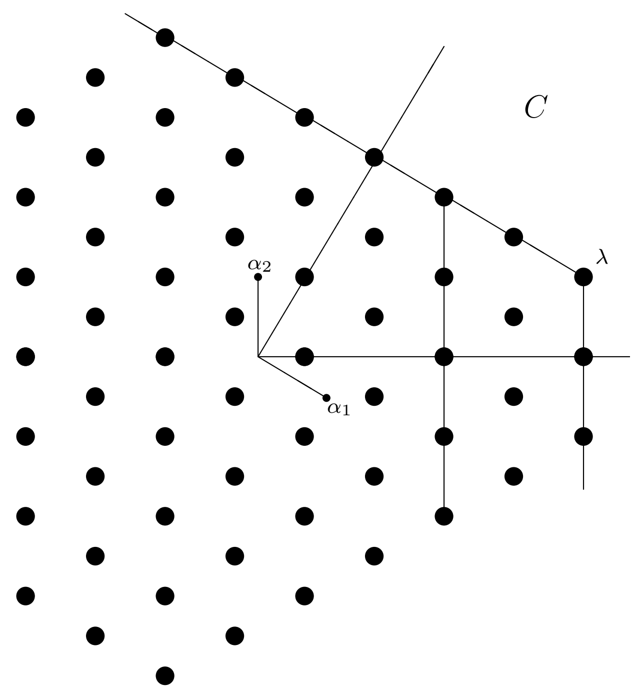
Упражнение 12. Рассмотрим естественное представление алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ в пространстве $V = \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ (где $1 \leq k \leq n$). Проверьте, что оно неприводимо, и найдите веса соответствующего простого $\mathfrak{g}$-модуля. (Ответ: веса — это $\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_k}$ (где $i_1 < \ldots < i_k$), все они однократны, $\varpi_k = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k$ — старший вес.)

Эти примеры несколько нетипичны, потому что в них все веса однократны, что отнюдь не всегда так.

Пример 7. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Тогда ее присоединенное представление неприводимо (т.е. $\mathfrak{g}$ — простой $\mathfrak{g}$-модуль). Его веса — это множество $R \cup \{0\}$, причем ненулевые веса, как известно, имеют кратность 1, а вес 0 имеет кратность $r = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$. Теорема о старшем весе, в частности, утверждает, что среди корней $\mathfrak{g}$ найдется такой корень $\alpha_{\max}$, что $\alpha_{\max} \geq \alpha$ для всех остальных корней $\alpha \in R$ (т.е. если $\alpha_{\max} = \sum_i n_i \alpha_i$, $\alpha = \sum_i m_i \alpha_i$, то $m_i \leq n_i$). Корень $\alpha_{\max}$ называется максимальным корнем данной неприводимой системы корней R. Например, для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ максимальный корень — это $\alpha_{1n} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$.

Замечание 8. Пусть V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, $\lambda \in P_+$ — его старший вес. Оказывается, что $\mu \in P$ является весом V тогда и только тогда, когда μ лежит в выпуклой оболочке множества $W\lambda$ и $\mu \equiv \lambda \mod Q$. Это можно рассматривать как задачу (доказательство, по существу, содержится в книге Бурбаки, Группы и алгебры Ли, гл.8, §7). Тем не менее приведем набросок доказательства для случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3)$ (это доказательство несложно перенести на общий случай).

Если μ — вес V, то $\mu \leq \lambda$, поэтому $\mu \equiv \lambda \mod Q$. Далее, условие $\mu \leq \lambda$ означает, что μ лежит в угле $\mathcal{A}$ с вершиной λ и сторонами, параллельными простым корням α_1 и α_2 (см. рисунок). Действуя группой Вейля, заключаем, что $\mu \in \cap_{w \in W} w\mathcal{A}$. Но $\cap_{w \in W} w\mathcal{A}$ — это и есть выпуклая оболочка множества $W\lambda$ (см. рисунок).



Докажем обратное утверждение. Пусть снова μ — вес V, $v \in V_\mu$, $v \neq 0$. Рассмотрим $\mathfrak{sl}(2)$-подмодуль $M = (U\mathfrak{sl}(2)_i)v \subset V$. По теореме ПБВ, он порождается (как линейное пространство) векторами $Y_i^q H_i^m X_i^p v$ с весом $\mu + (p-q)\alpha_i$ (см. лемму 10). Таким образом, M обладает весовым разложением (несмотря на то, что, как правило, не является $\mathfrak{g}$-подмодулем), и его веса имеют вид $\mu + k\alpha_i$, где $k \in \mathbb{Z}$. Выбрав среди них наибольший вес ν, можно заключить, что веса M имеют вид $\nu - k\alpha_i$, где $k \in \mathbb{Z}_+$. С другой стороны, веса M в смысле $\mathfrak{sl}(2)$-теории равны $(\nu - k\alpha_i)(H_i) = \nu(H_i) - 2k$. (Отметим, что различные веса в смысле общей теории дают различные веса в смысле $\mathfrak{sl}(2)$-теории.) Из свойств весового разложения в $\mathfrak{sl}(2)$-случае заключаем, что M (а значит, и V) содержит векторы веса $\nu, \nu - \alpha_i, \nu - 2\alpha_i, \ldots, \nu - \nu(H_i)\alpha_i = s_{\alpha_i}(\nu)$.

Теперь, применяя к весу λ изложенную выше конструкцию и действуя группой Вейля, заключаем, что веса, лежащие на границе выпуклой оболочки $W\lambda$ (и сравнимые с λ по модулю Q), входят в V (см. рисунок). Применяя аналогичные рассуждения к весам, лежащим на сторонах шестиугольника, заключаем, что веса, лежащие внутри выпуклой оболочки $W\lambda$ (и сравнимые с λ по модулю Q), входят в V. Это и требовалось доказать.

Теперь обсудим вопрос единственности простого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля с данным старшим весом.

Теорема 15. *Пусть $\lambda \in P_+$, V и V' — простые конечномерные $\mathfrak{g}$-модули, старшим весом которых является λ. Тогда $V \simeq V'$.*

Доказательство. Пусть v_0 (соотв. v_0') — старший вектор V (соотв. V'). Рассмотрим $\mathfrak{g}$-модуль $V \oplus V'$. Очевидно, $M = (U\mathfrak{g})(v_0, v_0')$ — подмодуль в $V \oplus V'$. Докажем, что M — простой $\mathfrak{g}$-модуль.

Пусть L — какой-либо простой подмодуль в M, и (v, v') — его старший вектор. Это значит, что $\mathfrak{n}_+(v, v') = 0$, т.е. $\mathfrak{n}_+ v = 0$, $\mathfrak{n}_+ v' = 0$. Согласно утверждению (4) теоремы 14, $v = cv_0$, $v' = c'v_0'$ для подходящих $c, c' \in \mathbb{C}$, $c, c' \neq 0$. С другой стороны, рассматривая ПБВ-базис $Y_{\beta_1}^{q_1} \ldots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \ldots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \ldots X_{\beta_k}^{p_k}$ и действуя им на (v_0, v_0'), мы заключаем, что $(v, v') = (cv_0, c'v_0') \in M = (U\mathfrak{g})(v_0, v_0')$ лишь при $c = c'$. Так как $L = (U\mathfrak{g})(v, v')$, то $L = M$, т.е. M прост.

Пусть π — ограничение на M естественной проекции $V \oplus V' \to V$. Тогда $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, V)$. Очевидно, $\pi \neq 0$ (ибо $\pi(v, v') = v$), поэтому по лемме Шура π — изоморфизм. Итак, $M \simeq V$. Аналогично, $M \simeq V'$, т.е. $V \simeq V'$. □

Для завершения классификации простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей нам остается выяснить, какие веса из P_+ в действительности являются старшими весами простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей. Оказывается, никаких дополнительных условий на вес из P_+ не возникает. Для построения простого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля с данным старшим весом нам понадобится подготовка (см. следующий раздел). Однако, в некоторых частных случаях это построение можно осуществить более просто. Мы ограничимся случаем $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3)$ (случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ см. Серр, часть 1, гл.7, §4).

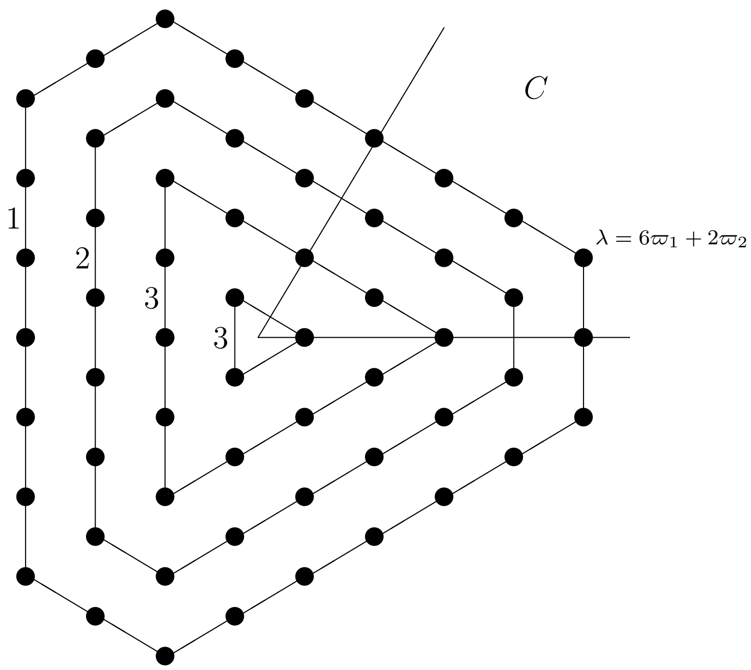
Пример 8. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3)$, $V = \mathbb{C}^3$. Мы уже отмечали, что V (соотв. $\bigwedge^2 V$) — простой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом ϖ_1 (соотв. ϖ_2).

Упражнение 13. $\mathfrak{g}$-модули $\bigwedge^2 V$ и V^* изоморфны (в частности, V^* — простой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом ϖ_2).

Упражнение 14. $\mathfrak{g}$-модуль S^nV (соотв. S^nV^*) является простым со старшим весом $n\varpi_1$ (соотв. $n\varpi_2$).

Задача 15. Пусть $\lambda \in P_+$, $\lambda = n_1\varpi_1 + n_2\varpi_2$ таков, что $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Докажите, что имеется естественный морфизм $\mathfrak{g}$-модулей $(S^{n_1}V) \otimes (S^{n_2}V^*) \to (S^{n_1-1}V) \otimes (S^{n_2-1}V^*)$, такой, что его ядро — простой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ.

Задача 16. Докажите, что кратности весов простого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля со старшим весом λ равны 1 на границе выпуклой оболочки $W\lambda$, возрастают на 1 при переходе к каждому следующему вложенному шестиугольнику и стабилизируются, как только очередной шестиугольник вырождается в треугольник (см. рисунок, где $\lambda = 6\varpi_1 + 2\varpi_2$).



3. Модули Верма. Простые модули со старшим весом

Для начала нам понадобится “абстрактное” определение $\mathfrak{g}$-модуля со старшим весом. При этом мы не будем исключать бесконечномерные модули и недоминантные веса.

Определение 3. $\mathfrak{g}$-модуль V называется *модулем со старшим весом* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, если существует вектор $v_0 \in V_\lambda$, $v_0 \neq 0$, такой, что $\mathfrak{n}_+ v_0 = 0$ и $V = (U\mathfrak{g})v_0$.

Замечание 9. 1) Вектор v_0 называется *старшим вектором* V.

2) Поскольку алгебра $U\mathfrak{g}$ счетномерна, то любой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом является не более чем счетномерным.

3) Отметим, что условие $\mathfrak{n}_+ v_0 = 0$ равносильно тому, что $X_i v_0 = 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Это нетрудно вывести из результата следующей задачи.

Задача 17. Пусть $\alpha \in R_+$. Тогда существует такое представление $\alpha = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_m}$ (где α_{i_j} — простые корни), что $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k}$ является корнем для всех $k = 1, \ldots, m$. (Решение см. Хамфри, §10.2.)

В предыдущем разделе мы доказали, что всякий простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль является модулем со старшим весом из P_+.

Предложение 16. *Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и старшим вектором v_0. Тогда*

(1) $V = (U\mathfrak{n}_-)v_0$;

(2) $V = \bigoplus_\mu V_\mu$, *причем все* V_μ *конечномерны и* $\dim V_\lambda = 1$;

(3) *если* $\mu \in \mathfrak{h}^*$ — *вес* V, *то* $\mu \leq \lambda$.

Замечание 10. Утверждение (3) этого предложения означает, что старший вес модуля действительно является наибольшим относительно "$\geq$".

Доказательство предложения 16. Докажем (1). Для этого заметим, что, согласно следствию 6, $U\mathfrak{g} = U\mathfrak{n}_- \cdot U\mathfrak{h} \cdot U\mathfrak{n}_+$; при этом $(U\mathfrak{h} \cdot U\mathfrak{n}_+)v_0 = \mathbb{C}v_0$, поэтому $V = (U\mathfrak{n}_-)v_0$.

Докажем (2) и (3). Прежде всего, подпространство $\bigoplus_\mu V_\mu$ (сумма действительно прямая!) является подмодулем в V (см. лемму 10) и содержит v_0. Так как $V = (U\mathfrak{g})v_0$, то $V = \bigoplus_\mu V_\mu$. Далее, рассмотрим в $U\mathfrak{n}_-$ ПБВ-базис $Y_{\beta_1}^{q_1} \ldots Y_{\beta_k}^{q_k}$ (где $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — все положительные корни). Согласно лемме 10, $Y_{\beta_1}^{q_1} \ldots Y_{\beta_k}^{q_k} v_0$ — вектор веса $\lambda - q_1\beta_1 - \ldots - q_k\beta_k$. Поскольку такие векторы порождают V как линейное пространство, то (3) доказано. Далее, равенство $\mu = \lambda - n_1\alpha_1 - \ldots - n_r\alpha_r = \lambda - q_1\beta_1 - \ldots - q_k\beta_k$, где $n_i \in \mathbb{Z}_+$ фиксированы, может выполняться лишь для конечного числа значений $q_j \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому $\dim V_\mu < \infty$. Наконец, $\lambda = \lambda - q_1\beta_1 - \ldots - q_k\beta_k$ тогда и только тогда, когда $q_1 = \ldots = q_k = 0$, поэтому $\dim V_\lambda = 1$. □

Наша промежуточная цель — построить "универсальный" $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ. Для этого нам понадобится понятие тензорного произведения модулей над унитальной ассоциативной алгеброй.

Пусть B — унитальная асоциативная алгебра, M_1 — правый B-модуль, M_2 — левый B-модуль. Положим $M_1 \otimes_B M_2 = (M_1 \otimes_\mathbb{C} M_2)/L$, где L — линейная оболочка векторов вида $m_1 b \otimes m_2 - m_1 \otimes bm_2$, где $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, $b \in B$. Имеется естественное билинейное отображение $\otimes_B : M_1 \times M_2 \to M_1 \otimes_B M_2$, $(m_1, m_2) \mapsto m_1 \otimes_B m_2 = m_1 \otimes m_2 + L$. По определению, $m_1 b \otimes_B m_2 = m_1 \otimes_B bm_2$.

Упражнение 18. Проверьте, что тензорное произведение над B обладает следующим свойством универсальности: для всякого линейного пространства V и билинейного отображения $f : M_1 \times M_2 \to V$ такого, что $f(m_1 b, m_2) = f(m_1, b m_2)$, существует единственное линейное отображение $\tilde{f} : M_1 \otimes_B M_2 \to V$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} M_1 \times M_2 \arrow[r, "\otimes_B"] \arrow[dr, "f"'] & M_1 \otimes_B M_2 \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & V \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Упражнение 19. Пусть дополнительно на M_1 имеется структура левого A-модуля (где A — унитальная ассоциативная алгебра), причем $a(mb) = (am)b$ для всех $m \in M_1$, $a \in A$, $b \in B$ (в такой ситуации говорят, что M_1 — это A-B-*бимодуль*). Проверьте, что формула $a(m_1 \otimes_B m_2) = (am_1) \otimes_B m_2$ определяет на $M_1 \otimes_B M_2$ структуру левого A-модуля.

Упражнение 20. Пусть M_1 — A-B-бимодуль, M_2 — B-C-бимодуль, M_3 — левый C-модуль. Проверьте, что на $M_1 \otimes_B M_2$ имеется естественная структура A-C-бимодуля, и канонический изоморфизм $(M_1 \otimes_{\mathbb{C}} M_2) \otimes_{\mathbb{C}} M_3 \simeq M_1 \otimes_{\mathbb{C}} (M_2 \otimes_{\mathbb{C}} M_3)$ индуцирует изоморфизм A-модулей $(M_1 \otimes_B M_2) \otimes_C M_3 \simeq M_1 \otimes_B (M_2 \otimes_C M_3)$.

Упражнение 21. Пусть M — левый B-модуль. Проверьте, что умножение в алгебре B превращает B в B-B-бимодуль, причем $B \otimes_B M \simeq M$ (канонический изоморфизм левых B-модулей).

Пусть теперь $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ — вес. Рассмотрим одномерное линейное пространство $\mathbb{C}$ со структурой $\mathfrak{b}_+$-модуля, заданного формулами $h \cdot 1 = \lambda(h)$, $x \cdot 1 = 0$, где $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{n}_+$. Иначе говоря, $\mathbb{C}$ становится (левым) $U\mathfrak{b}_+$-модулем. Обозначим этот модуль через $\mathbb{C}_\lambda$.

Напомним, что $U\mathfrak{b}_+$ канонически вкладывается в $U\mathfrak{g}$, и $U\mathfrak{g}$ имеет естественную структуру $U\mathfrak{g}$-$U\mathfrak{b}_+$-бимодуля. Положим $M(\lambda) = U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}_+} \mathbb{C}_\lambda$. В соответствии с предыдущими рассмотрениями, $M(\lambda)$ является (левым) $U\mathfrak{g}$-модулем, т.е. $\mathfrak{g}$-модулем. Модуль $M(\lambda)$ называется *модулем Верма со старшим весом* λ.

Предложение 17. *Модуль $M(\lambda)$ является $\mathfrak{g}$-модулем со старшим весом λ и старшим вектором $1_\lambda = 1 \otimes_{U\mathfrak{b}_+} 1$. При этом $M(\lambda)$ обладает следующим свойством универсальности: для всякого $\mathfrak{g}$-модуля со старшим весом λ и старшим вектором v_0 существует единственный морфизм $\mathfrak{g}$-модулей $M(\lambda) \to V$, при котором $1_\lambda \mapsto v_0$; этот морфизм сюръективен.*

Доказательство. Очевидно, что $M(\lambda) = (U\mathfrak{g})1_\lambda$. Далее,

$$h \cdot 1_\lambda = h \otimes_{U\mathfrak{b}_+} 1 = 1 \otimes_{U\mathfrak{b}_+} (h \cdot 1) = \lambda(h) 1_\lambda$$

при $h \in \mathfrak{h}$, и

$$x \cdot 1_\lambda = x \otimes_{U\mathfrak{b}_+} 1 = 1 \otimes_{U\mathfrak{b}_+} (x \cdot 1) = 0$$

при $x \in \mathfrak{n}_+$.

Далее, пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ и старшим вектором v_0. Рассмотрим билинейное отображение $f : U\mathfrak{g} \times \mathbb{C}_\lambda \to V$, заданное формулой $f(u, z) = u(zv_0) = zuv_0$. Если $h \in \mathfrak{h}$, то $f(uh, z) = zuhv_0 = \lambda(h)zuv_0$, $f(u, hz) = \lambda(h)f(u, z) = \lambda(h)zuv_0$. Аналогично проверяется, что $f(ux, z) = f(u, xz)$ при $x \in \mathfrak{n}_+$. Согласно теореме ПБВ, отсюда следует, что $f(ub, z) = f(u, bz)$ для всех $b \in U\mathfrak{b}_+$. Поэтому (см. упражнение 18) существует единственное линейное отображение $\tilde{f} : M(\lambda) \to V$, такое, что $\tilde{f}(u \cdot 1_\lambda) = f(u, 1) = uv_0$. В частности, $\tilde{f}(1_\lambda) = v_0$, и (проверьте!) $\tilde{f}$ является морфизмом $\mathfrak{g}$-модулей. Так как $V = (U\mathfrak{g})v_0$, то $\tilde{f}$ сюрьективен. □

Замечание 11. Таким образом, модуль Верма $M(\lambda)$ определен свойством универсальности из предложения 17 однозначно с точностью до единственного изоморфизма, переводящего друг в друга выделенные старшие векторы.

Предложение 18. *Отображение $U\mathfrak{n}_- \to M(\lambda)$, заданное формулой $a \mapsto a \cdot 1_\lambda$, является изоморфизмом $\mathfrak{n}_-$-модулей.*

Доказательство. Согласно следствию 6, $U\mathfrak{g} \simeq U\mathfrak{n}_- \otimes_{\mathbb{C}} U\mathfrak{b}_+$ как линейные пространства. Очевидно, что этот изоморфизм является изоморфизмом $U\mathfrak{n}_-$-модулей. Поэтому мы получаем следующую цепочку изоморфизмов $U\mathfrak{n}_-$-модулей: $U\mathfrak{n}_- \simeq U\mathfrak{n}_- \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \simeq U\mathfrak{n}_- \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\lambda \simeq U\mathfrak{n}_- \otimes_{\mathbb{C}} (U\mathfrak{b}_+ \otimes_{U\mathfrak{b}_+} \mathbb{C}_\lambda) \simeq (U\mathfrak{n}_- \otimes_{\mathbb{C}} U\mathfrak{b}_+) \otimes_{U\mathfrak{b}_+} \mathbb{C}_\lambda \simeq U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}_+} \mathbb{C}_\lambda \simeq M(\lambda)$. Очевидно, сквозное отображение дает искомый изоморфизм. □

Замечание 12. Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ и старшим вектором v_0. Заметим, что естественный гомоморфизм $M(\lambda) \to V$ (см. предложение 17) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда для каждого $a \in U\mathfrak{n}_-$ условие $av_0 = 0$ влечет $a = 0$. В самом деле, естественный гомоморфизм $M(\lambda) \to V$ определен формулой $a \cdot 1_\lambda \mapsto av_0$ и заведомо сюръективен. В силу предложения 18, инъективность этого гомоморфизма равносильна указанному выше условию.

Предложение 19. *Среди подмодулей модуля Верма $M(\lambda)$, отличных от всего $M(\lambda)$, существует наибольший подмодуль $K(\lambda)$.*

Доказательство. Положим $M(\lambda)_+ = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} M(\lambda)_\mu$. Если N — подмодуль в $M(\lambda)$, то $N = \bigoplus_\mu N_\mu$, где $N_\mu = N \cap M(\lambda)_\mu$. Так как $M(\lambda)_\lambda$ одномерно и порождает $M(\lambda)$ как $U\mathfrak{g}$-модуль, то $N_\lambda = 0$ для любого подмодуля $N \subsetneq M(\lambda)$. Иными словами, $N \subset M(\lambda)_+$. Поэтому сумма $K(\lambda)$ всех подмодулей, отличных от $M(\lambda)$, тоже содержится в $M(\lambda)_+$, т.е. не совпадает с $M(\lambda)$. По построению, $K(\lambda)$ содержит любой подмодуль в $M(\lambda)$, отличный от $M(\lambda)$. □

Замечание 13. Это предложение буквально переносится (вместе с доказательством) на любой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ.

Положим $L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)$.

Предложение 20. *Модуль $L(\lambda)$ является простым $\mathfrak{g}$-модулем со старшим весом λ.*

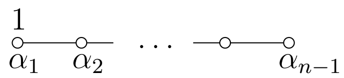
Доказательство. Очевидно, образ $1_\lambda \in M(\lambda)$ при факторотображении $M(\lambda) \to M(\lambda)/K(\lambda) = L(\lambda)$ отличен от нуля, имеет вес λ и аннулируется элементами из $\mathfrak{n}_+$. Далее, если N — подмодуль в $L(\lambda)$, отличный от всего $L(\lambda)$, то его прообраз в $M(\lambda)$ отличен от всего $M(\lambda)$, т.е. содержится в $K(\lambda)$. Поэтому $N = 0$. □

Замечание 14. Отметим, что $L(\lambda)$ — единственный с точностью до изоморфизма простой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ. В самом деле, пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ. Тогда $V \simeq M(\lambda)/N$ для некоторого подмодуля $N \subsetneq M(\lambda)$. Если $N \neq K(\lambda)$, то найдется подмодуль $N' \subsetneq M(\lambda)$, такой, что $N' \not\subset N$. Образ N' в V является собственным подмодулем в V, т.е. V не прост.

Теорема 21. *Пусть $\lambda \in P_+$. Тогда $\dim L(\lambda) < \infty$.*

Следствие 22 (теорема Э. Картана о старшем весе). *Имеется взаимно однозначное соответствие между доминантными весами и классами изоморфизма простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей. Именно, весу $\lambda \in P_+$ соответствует $\mathfrak{g}$-модуль $L(\lambda)$.* □

Замечание 15. Простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\lambda \in P_+$ часто “изображается” диаграммой Дынкина для $\mathfrak{g}$, снабженной “числовыми отметками”, т.е. числами $\lambda(H_i) \in \mathbb{Z}_+$ при соответствующих вершинах (нулевые отметки, как правило, пропускают). Например, тавтологическое представление алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ “изображается” следующей картинкой:



Чтобы доказать теорему 21, нам нужно показать, что при условии $\lambda \in P_+$ подмодуль $K(\lambda)$ — “большой”, т.е. $M(\lambda)$ содержит “большие” подмодули. Нужный нам результат содержится в предложении 24 (см. ниже). Но сначала — несколько важных обозначений.

Обозначим для краткости $s_i = s_{\alpha_i} \in W$, $i = 1, \dots, r$. Напомним, что

$$s_i(\lambda) = \lambda - \frac{2\langle \alpha_i, \lambda\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}\alpha_i = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i.$$

Отражения s_i обычно называют *простыми отражениями.* Известно, что s_i порождают группу Вейля W.

Положим $\rho = \sum_i \varpi_i \in P_+$. Таким образом, $\rho(H_i) = 1$ для всех $i = 1, \dots, r$.

Предложение 23. $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_+} \alpha$.

Предложение 23 относится исключительно к системам корней. Поэтому отложим его доказательство (оно будет после доказательства теоремы 21).

Предложение 24. *Пусть вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ таков, что $n := \lambda(H_i) = \langle \alpha_i^\vee, \lambda\rangle \in \mathbb{Z}_+$ для некоторого i. Положим $V = (U\mathfrak{g})(Y_i^{n+1} \cdot 1_\lambda) \subset M(\lambda)$. Тогда $V \simeq M(s_i(\lambda + \rho) - \rho)$.*

Доказательство. Положим $v_0 = Y_i^{n+1} \cdot 1_\lambda$. Проверим, что $V = (U\mathfrak{g})v_0$ является $\mathfrak{g}$-модулем со старшим весом $s_i(\lambda+\rho)-\rho$ (и старшим вектором v_0). Прежде всего, v_0 имеет вес $\lambda - (n+1)\alpha_i = \lambda - (\lambda+\rho)(H_i)\alpha_i = s_i(\lambda+\rho) - \rho$. Далее, нужно проверить, что $X_j v_0 = 0$ для всех $j = 1, \dots, r$. Если $j \neq i$, то $[X_j, Y_i] = 0$, поэтому $X_j v_0 = X_j Y_i^{n+1} \cdot 1_\lambda = Y_i^{n+1} X_j \cdot 1_\lambda = 0$. Если же $j = i$, то достаточно рассмотреть действие $\mathfrak{sl}(2)_i$.

Упражнение 22. Пусть X, Y, H — стандартный базис в $\mathfrak{sl}(2)$. Проверьте, что для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ в алгебре $U\mathfrak{sl}(2)$ имеет место равенство

$$XY^{n+1} = Y^{n+1}X + (n+1)Y^n(H-n).$$

Итак, $X_i v_0 = X_i Y_i^{n+1} \cdot 1_\lambda = Y_i^{n+1} X_i \cdot 1_\lambda + (n+1)Y_i^n(H_i - n)1_\lambda = 0$ (ибо $X_i \cdot 1_\lambda = 0$ и $H_i \cdot 1_\lambda = \lambda(H_i)1_\lambda = n \cdot 1_\lambda$).

Согласно предложению 17, имеется естественный морфизм $M(s_i(\lambda+\rho)-\rho) \to V$. Так как $v_0 \in V \subset M(\lambda)$, то, по предложению 18, для каждого $a \in U\mathfrak{n}_-$ условие $av_0 = 0$ влечет $a = 0$. Поэтому $M(s_i(\lambda+\rho)-\rho) \to V$ — изоморфизм (см. замечание 12). □

Доказательство теоремы 21. Пусть $v_0 \in L(\lambda)$ — образ $1_\lambda \in M(\lambda)$ при факторотображении $M(\lambda) \to M(\lambda)/K(\lambda) = L(\lambda)$. Положим $n_i = \lambda(H_i) \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. $\lambda = n_1\varpi_1 + \dots + n_r\varpi_r$). Тогда условия предложения 24 выполнены для каждого i, т.е. $Y_i^{n_i+1} \cdot 1_\lambda \in M(s_i(\lambda+\rho)-\rho) \subset K(\lambda)$. Иными словами, $Y_i^{n_i+1}v_0 = 0$ для всех $i = 1, \dots, r$.

Теперь докажем, что множество весов $\mathfrak{g}$-модуля $L(\lambda)$ инвариантно относительно действия группы Вейля W. Достаточно доказать инвариантность относительно каждого из простых отражений s_i.

Зафиксируем i. Очевидно, линейная оболочка векторов $Y_i^k v_0$, $k = 0, 1, \dots, n_i$ является конечномерным $\mathfrak{sl}(2)_i$-подмодулем в $L(\lambda)$. Пусть $\mathcal{E}_i$ — множество всех конечномерных $\mathfrak{sl}(2)_i$-подмодулей в $L(\lambda)$. Мы убедились, что это множество непусто.

Лемма 25. *Если $N \in \mathcal{E}_i$, то $\mathfrak{g}N \in \mathcal{E}_i$ (здесь $\mathfrak{g}N$ — линейная оболочка векторов xv, где $x \in \mathfrak{g}$, $v \in N$).*

Доказательство. Конечномерность $\mathfrak{g}N$ очевидна. Далее, если $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{sl}(2)_i$, $v \in N$, то $y(xv) = x(yv) + [y, x]v \in \mathfrak{g}N$. □

Пусть $E \subset L(\lambda)$ — сумма всех подмодулей из $\mathcal{E}_i$. По лемме 25, E является $\mathfrak{g}$-подмодулем в $L(\lambda)$; кроме того, $v_0 \in E$. Поэтому $E = L(\lambda)$. Итак, $L(\lambda)$ — сумма конечномерных $\mathfrak{sl}(2)_i$-модулей.

Пусть теперь $\mu \in \mathfrak{h}^*$ — вес $L(\lambda)$, и $v \in L(\lambda)_\mu$, $v \neq 0$. Рассмотрим $\mathfrak{sl}(2)_i$-подмодуль $N = (U\mathfrak{sl}(2)_i)v$, порожденный v.

Упражнение 23. $\dim N < \infty$.

Так как $\mu \leq \lambda$ и $\lambda \in P_+$, то $\mu \in P$; в частности, $p_i = \mu(H_i) \in \mathbb{Z}$. Положим $v' = Y_i^{p_i}v$ при $p_i \geq 0$ и $v' = X_i^{-p_i}v$ при $p_i \leq 0$. Из теории конечномерных $\mathfrak{sl}(2)$-модулей (примененной к N) следует, что $v' \neq 0$. Так как вес v' равен $\mu - p_i\alpha_i = \mu - \mu(H_i)\alpha_i = s_i(\mu)$, то $s_i(\mu)$ — вес $L(\lambda)$, и инвариантность множества весов $L(\lambda)$ относительно s_i доказана.

Наконец, покажем, что множество весов $L(\lambda)$ конечно. Так как множество весов $L(\lambda)$ инвариантно относительно конечной группы W, и любой целочисленный вес действием W переводится в доминантный, то достаточно доказать конечность множества доминантных весов, входящих в $L(\lambda)$. Пусть μ — вес $L(\lambda)$. Так как $\mu \le \lambda$, то $\mu = \lambda - \sum_j q_j\alpha_j$, где $q_j \in \mathbb{Z}_+$. Условие доминантности μ означает, что $\langle \lambda, \alpha_i\rangle \ge \sum_j q_j \langle \alpha_j, \alpha_i\rangle$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Поэтому $\langle \lambda, \alpha\rangle \ge \sum_j q_j\langle \alpha_j, \alpha\rangle$ для всех $\alpha \in R_+$, и так как $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+} \alpha$ (см. предложение 23), то $\langle \lambda, \rho\rangle \ge \sum_j q_j\langle \alpha_j, \rho\rangle$. С другой стороны, $\rho = \sum_i \varpi_i$, поэтому

$$\langle \alpha_j, \rho\rangle = \sum_i \langle \alpha_j, \varpi_i\rangle = \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}{2}\sum_i \langle \alpha_j^\vee, \varpi_i\rangle = \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}{2},$$

и $\langle \lambda, \rho\rangle \ge \sum_j \frac{q_j\langle \alpha_j,\alpha_j\rangle}{2}$. Таким образом, $\sum_j \frac{q_j\langle \alpha_j,\alpha_j\rangle}{2}$ ограничено сверху, и тем самым множество доминантных весов, входящих в $L(\lambda)$, конечно.

Итак, множество весов $L(\lambda)$ конечно, и все весовые подпространства конечномерны (см. предложение 16). Поэтому $\dim L(\lambda) < \infty$. □

Пример 9. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, X, Y, H — стандартный базис в $\mathfrak{g}$. Модуль Верма $M(\lambda)$ (где $\lambda \in \mathbb{C}$) — это линейное пространство с базисом $v_0 = 1_\lambda, v_1, v_2, \ldots$ и со структурой $\mathfrak{g}$-модуля такой, что $Xv_0 = 0$, $Hv_k = (\lambda - 2k)v_k$, $Yv_k = v_{k+1}$ для всех k. (Этой информации достаточно, чтобы получить формулы для Xv_k для всех k.)

Если $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, то $K(\lambda)$ — это линейная оболочка векторов $v_{\lambda+1}, v_{\lambda+2}, \ldots$, причем $K(\lambda) \simeq M(-\lambda - 2)$. (Отметим, что $-\lambda - 2$ — это $s(\lambda + \rho) - \rho$, где s — отражение относительно единственного простого корня α. В самом деле, при отождествлении $\mathfrak{h}^* = (\mathbb{C}H)^*$ и $\mathbb{C}$ получаем $\alpha = 2$, т.е. $\rho = 1$, и $s(\mu) = -\mu$, поэтому $s(\lambda + \rho) - \rho = (-\lambda - 1) - 1 = -\lambda - 2$.) Модуль $L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)$ является простым $\mathfrak{g}$-модулем размерности $\lambda + 1$.

Если же $\lambda \notin \mathbb{Z}_+$, то легко проверить, что $M(\lambda)$ прост, т.е. $L(\lambda) = M(\lambda)$.

Замечание 16. Можно доказать, что модуль $M(\lambda)$ прост тогда и только тогда, когда $(\lambda + \rho)(H_\alpha) \notin \mathbb{N}$ для всех $\alpha \in R_+$ (это случай “общего положения”). В общем случае (в отличие от простейшего случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$) возможна и “промежуточная” ситуация, т.е. $M(\lambda)$ не прост, но $L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)$ бесконечномерен.

Замечание 17. Пусть $\lambda \in P_+$, т.е. $\lambda = n_1\varpi_1 + \ldots + n_r\varpi_r$, где $n_i \in \mathbb{Z}_+$. При доказательстве теоремы 21 мы убедились, что $Y_i^{n_i+1} \cdot 1_\lambda \in K(\lambda)$ (т.е. $Y_i^{n_i+1}v_0 = 0$, где v_0 — старший вектор $L(\lambda)$) для всех $i = 1, \ldots, r$. Можно доказать, что на самом деле векторы $Y_i^{n_i+1} \cdot 1_\lambda$ порождают $K(\lambda)$ как $\mathfrak{g}$-модуль (и даже как $\mathfrak{n}_-$-модуль), т.е.

$$K(\lambda) = \sum_i (U\mathfrak{g})(Y_i^{n_i+1} \cdot 1_\lambda) = \sum_i (U\mathfrak{n}_-)(Y_i^{n_i+1} \cdot 1_\lambda).$$

Иначе говоря, $L(\lambda)$ порождается как $\mathfrak{g}$-модуль элементом v_0 с определяющими соотношениями $X_iv_0 = 0$, $H_iv_0 = n_iv_0$, $Y_i^{n_i+1}v_0 = 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$ (т.е. $L(\lambda)$ — фактор $U\mathfrak{g}$ по левому идеалу, порожденному элементами X_i, $H_i - n_i$, $Y_i^{n_i+1}$, где $i = 1, \ldots, r$).

Теперь докажем предложение 23. Для этого нам понадобится

Предложение 26. *Пусть R — приведенная система корней. Тогда $s_i(R_+ \setminus \{\alpha_i\}) = R_+ \setminus \{\alpha_i\}$ для всех $i = 1, \ldots, r$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in R_+$. Тогда $\alpha = \sum_j n_j \alpha_j$, где $n_i \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому

$$s_i(\alpha) = \sum_j n_j s_i(\alpha_j) = \sum_{j \neq i} n_j \alpha_j - \left(n_i + \sum_{k \neq i} n_k \langle \alpha_i^\vee, \alpha_k \rangle \right) \alpha_i.$$

Если $\alpha \neq \alpha_i$, то, ввиду приведенности R, $n_j > 0$ для некоторого $j \neq i$. Так как $s_i(\alpha) \in R$ и один из коэффициентов в разложении $s_i(\alpha)$ по простым корням (именно, n_j) положителен, то $s_i(\alpha) \in R_+$. □

Доказательство предложения 23. По определению, $\langle \alpha_i^\vee, \rho \rangle = 1$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Положим на минуту $\widetilde{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$. Достаточно проверить, что $\langle \alpha_i^\vee, \widetilde{\rho} \rangle = 1$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Но

$$\langle \alpha_i^\vee, \widetilde{\rho} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \langle \alpha_i^\vee, \alpha \rangle = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \langle \alpha_i^\vee, \alpha \rangle,$$

и, согласно предложению 26,

$$\sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \alpha = \sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} s_i(\alpha) = \sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} (\alpha - \langle \alpha_i^\vee, \alpha \rangle \alpha_i) =$$

$$= \left(\sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \alpha \right) - \left(\sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \langle \alpha_i^\vee, \alpha \rangle \right) \alpha_i.$$

Поэтому

$$\sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \langle \alpha_i^\vee, \alpha \rangle = 0,$$

т.е. $\langle \alpha_i^\vee, \widetilde{\rho} \rangle = 1$. □

4. Характеры. Формула Вейля для характера

Пусть $\lambda \in P_+$. Как разобраться в строении простого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля $L(\lambda)$? Например, какова его размерность? Более тонкий вопрос: как найти кратности весов, входящих в $L(\lambda)$? Иными словами, как найти $\dim L(\lambda)_\mu$?

Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль, такой, что $V = \bigoplus_\mu V_\mu$, причем $\dim V_\mu < \infty$ для всех $\mu \in \mathfrak{h}^*$. (Мы знаем, что модули со старшим весом обладают этим свойством.) Сопоставим набору чисел $\dim V_\mu$ его “производящую функцию” $\operatorname{ch} V = \sum_\mu (\dim V_\mu)\, \mathrm{e}^\mu$, где e^μ —

“формальные символы”. “Выражение” $\operatorname{ch} V$ называется *характером* $\mathfrak{g}$-модуля V. Про $\mathfrak{g}$-модуль V мы будем говорить, что он *обладает характером.* Разумеется, характер V содержит в себе всю информацию о $\dim V_\mu$.

Чтобы понять, какая польза от введения характеров, дадим более точные определения. Именно, рассмотрим множество $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ всех функций из $\mathfrak{h}^*$ в $\mathbb{Z}$. Будем записывать функцию $f : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z}$ в виде $\sum_\mu f(\mu)\, \mathrm{e}^\mu$ (при таком подходе e^μ — это дельта-функция точки $\mu \in \mathfrak{h}^*$). По определению, $\operatorname{ch} V \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$. Ясно, что $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ — абелева группа относительно операции $f + g = \left(\sum_\mu f(\mu)\, \mathrm{e}^\mu\right) + \left(\sum_\mu g(\mu)\, \mathrm{e}^\mu\right) := \sum_\mu (f(\mu) + g(\mu))\, \mathrm{e}^\mu$.

Положим теперь

$$f \cdot g := \sum_\nu \left(\sum_{\lambda+\mu=\nu} f(\lambda) g(\mu) \right) \mathrm{e}^\nu .$$

Подчеркнем, что эта формула имеет смысл только в том случае, когда все суммы $\sum_{\lambda+\mu=\nu} f(\lambda)g(\mu)$ конечны (т.е. в них конечное число слагаемых, отличных от нуля), что имеет место отнюдь не всегда. Иными словами, мы полагаем $\mathrm{e}^\lambda\, \mathrm{e}^\mu = \mathrm{e}^{\lambda+\mu}$ и продолжаем это умножение на (некоторые) пары элементов из $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ “по $\mathbb{Z}$-линейности”.

Тривиально проверяется, что так введенное умножение (в случаях, когда оно определено) обладает свойствами ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности относительно сложения; элемент $1 = \mathrm{e}^0$ является единичным.

В подгруппе $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ конечных сумм (т.е. функций из $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ с конечным носителем) наше умножение всегда определено и превращает $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ в коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Это не что иное, как групповое кольцо абелевой группы $\mathfrak{h}^*$ (по соображениям традиции и психологии мы предварительно записали эту группу мультипликативно, т.е. положили $\lambda \mapsto \mathrm{e}^\lambda$, и $\mathrm{e}^\lambda\, \mathrm{e}^\mu = \mathrm{e}^{\lambda+\mu}$). Нас особенно будет интересовать случай, когда носитель функции из $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ лежит в P (ибо характеры конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей обладают этим свойством). Такие функции образуют подкольцо $\mathbb{Z}[P] \subset \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$; $\mathbb{Z}[P]$ — групповое кольцо группы P.

Нам, однако, понадобятся характеры некоторых бесконечномерных модулей со старшим весом — например, модулей Верма. Мы знаем, что носитель характера модуля со старшим весом λ лежит в множестве $\lambda - Q_+$ (т.е. в множестве тех $\mu \in \mathfrak{h}^*$, для которых $\mu \leq \lambda$). Оказывается, такие характеры также можно перемножать. Точнее:

Упражнение 24. Пусть $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ — подгруппа в $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$, состоящая из функций с носителем, содержащемся в конечном объединении множеств вида $\lambda - Q_+$. Проверьте, что рассмотренное нами умножение определено в $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ (и тем самым $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ становится коммутативным ассоциативным кольцом с единицей; $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ — подкольцо в $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$).

Каков $\mathfrak{g}$-модульный смысл сложения и умножения характеров?

Упражнение 25. Пусть V, V' — $\mathfrak{g}$-модули, обладающие характером. Проверьте, что:

1) $\mathfrak{g}$-модуль $V \oplus V'$ обладает характером, причем $\operatorname{ch}(V \oplus V') = \operatorname{ch} V + \operatorname{ch} V'$.

2) $\mathfrak{g}$-модуль $V \otimes V'$ обладает характером тогда и только тогда, когда произведение $\operatorname{ch} V \cdot \operatorname{ch} V'$ определено; при этом $\operatorname{ch}(V \otimes V') = \operatorname{ch} V \cdot \operatorname{ch} V'$.

Вычислим характер модуля Верма.

Рассмотрим функцию $p : Q_+ \to \mathbb{N}$, определенную формулой

$$p(\nu) = \left| \left\{ (q_\alpha)_{\alpha \in R_+} \;\middle|\; \nu = \sum_\alpha q_\alpha \alpha,\ q_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \right\} \right|.$$

Иными словами, $p(\nu)$ — число представлений элемента $\nu \in Q_+$ в виде линейной комбинации положительных корней с целыми неотрицательными коэффициентами. (Множество таких представлений конечно, ибо не существует нетривиальных линейных комбинаций положительных корней с целыми неотрицательными коэффициентами, равных нулю.) Функция p называется *функцией Костанта* (или *функцией разбиения*). Удобно доопределить p на всем $\mathfrak{h}^*$, полагая $p(\nu) = 0$ при $\nu \notin Q_+$.

Так как модуль Верма $M(\lambda)$ является модулем со старшим весом λ, то его веса имеют вид $\lambda - \nu$, где $\nu \in Q_+$. (В частности, $\operatorname{ch} M(\lambda) \in \mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$.)

Предложение 27. *Пусть* $\nu \in Q_+$. *Тогда* $\dim M(\lambda)_{\lambda-\nu} = p(\nu)$.

Доказательство. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — все положительные корни. Весовое подпространство $M(\lambda)_{\lambda-\nu}$ порождается векторами $Y_{\beta_1}^{q_1} \ldots Y_{\beta_k}^{q_k} \cdot 1_\lambda$, где $\nu = q_1\beta_1 + \ldots + q_k\beta_k$. Эти векторы линейно независимы по предложению 18. Таким образом, $\dim M(\lambda)_{\lambda-\nu} = p(\nu)$. □

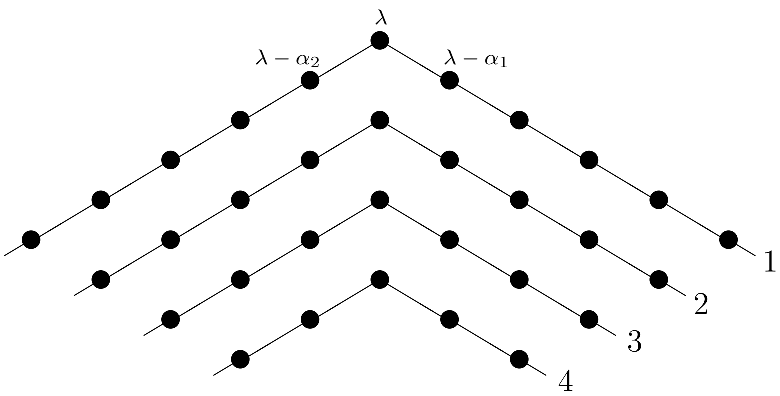
Следствие 28.

$$\operatorname{ch} M(\lambda) = \mathrm{e}^\lambda \sum_{\nu \in Q_+} p(\nu)\, \mathrm{e}^{-\nu}.$$

□

Пример 10. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3)$. В этом случае $Q_+ = \mathbb{Z}_+\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}_+\alpha_2$, $R_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$. Пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$. Равенство $\nu = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z(\alpha_1 + \alpha_2)$ равносильно условиям $x + z = a_1$, $y + z = a_2$. Таким образом, $p(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)$ — число решений системы уравнений $x + z = a_1$, $y + z = a_2$ в целых неотрицательных числах. Ясно, что все такие решения имеют вид $x = a_1 - z$, $y = a_2 - z$, где $0 \le z \le \min(a_1, a_2)$. Итак, $p(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = 1 + \min(a_1, a_2)$.

Таким образом, “весовая диаграмма” для $M(\lambda)$ в этом случае выглядит так (числа означают кратность соответствующих весов):



Вот более удобный для нас вариант формулы для $\operatorname{ch} M(\lambda)$.

Предложение 29.

$$\operatorname{ch} M(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda} \prod_{\alpha \in R_+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha})^{-1}.$$

Доказательство.

$$\sum_{\nu \in Q_+} p(\nu)\,\mathrm{e}^{-\nu} = \sum_{(q_\alpha)_{\alpha \in R_+}} \mathrm{e}^{-\sum_{\alpha \in R_+} q_\alpha \alpha} = \prod_{\alpha \in R_+} (1 + \mathrm{e}^{-\alpha} + \mathrm{e}^{-2\alpha} + \ldots) = \prod_{\alpha \in R_+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha})^{-1}.$$

□

Замечание 18. Формулировка и доказательство предложения 29 имеют смысл в коммутативном кольце $\mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$. В частности, при $\alpha \in R_+$ элемент $1 - \mathrm{e}^{-\alpha}$ обратим в $\mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$, и $(1 - \mathrm{e}^{-\alpha})(1 + \mathrm{e}^{-\alpha} + \mathrm{e}^{-2\alpha} + \ldots) = 1$.

Имеется еще более симметричная формула для $\operatorname{ch} M(\lambda)$.

Следствие 30.

$$\operatorname{ch} M(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda + \rho} \prod_{\alpha \in R_+} \left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}} \right)^{-1}.$$

Доказательство. Умножим и разделим выражение для $\operatorname{ch} M(\lambda)$ из предложения 29 на $\mathrm{e}^{\rho} = \prod_{\alpha \in R_+} \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}}$. □

Чему равен характер простого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля?

Чтобы написать формулу для характера, введем одно обозначение. Пусть $w \in W$. Положим $\varepsilon(w) = \det w$. Так как элементы группы Вейля W являются ортогональными преобразованиями евклидова пространства $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, то $\varepsilon(w) = \pm 1$. В частности, $\varepsilon(s_\alpha) = -1$. Таким образом, ε является гомоморфизмом из W в группу $\{1, -1\}$ из двух элементов. Например, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ можно отождествить W с S_n, и тогда $\varepsilon(w) = \operatorname{sign}(w)$.

Теорема 31 (формула Г. Вейля для характера). *Пусть $\lambda \in P_+$. Тогда*

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\,\mathrm{e}^{w(\lambda + \rho)}}{\prod_{\alpha \in R_+} \left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}} \right)}.$$

Доказательство этой глубокой теоремы требует серьезной подготовки. Поэтому сначала обсудим ее и получим некоторые следствия.

Прежде всего, $L(0)$ — тривиальный одномерный $\mathfrak{g}$-модуль, поэтому $\operatorname{ch} L(0) = 1$. Применяя формулу Вейля для характера к случаю $\lambda = 0$, получаем следующий результат:

Теорема 32 (формула Г. Вейля для знаменателя).

$$\prod_{\alpha \in R_+} \left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}} \right) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\,\mathrm{e}^{w\rho}.$$

□

Это позволяет переписать формулу Вейля для характера более симметрично:

Теорема 33. *Пусть $\lambda \in P_+$. Тогда*

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, \mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, \mathrm{e}^{w\rho}}.$$

$\square$

Пример 11. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$. Как известно, веса $L(\lambda)$ — это в точности числа $\lambda, \lambda-2, \lambda-4, \ldots, -\lambda+2, -\lambda$, и кратности всех весов равны 1. Поэтому

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda-2} + \ldots + \mathrm{e}^{-\lambda+2} + \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda+1} - \mathrm{e}^{-\lambda-1}}{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}.$$

Формула Вейля для характера дает тот же результат.

Учитывая следствие 30, формулу Вейля для характера (в ее первоначальной формулировке) можно переписать в следующем виде:

Теорема 34. *Пусть $\lambda \in P_+$. Тогда*

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \sum_{w\in W} \varepsilon(w) \operatorname{ch} M(w(\lambda+\rho)-\rho).$$

$\square$

Замечание 19. Введем обозначение $\widetilde{M}(\lambda) = M(\lambda-\rho)$, $\widetilde{L}(\lambda) = L(\lambda-\rho)$ (отметим, что во многих книгах $M(\lambda)$ и $L(\lambda)$ сразу определяются как модули со старшим весом $\lambda-\rho$). Так как $(\lambda-\rho)(H_i) = \lambda(H_i) - 1$, то доминантность $\lambda-\rho$ (т.е. конечномерность $\widetilde{L}(\lambda)$) означает, что $\lambda \in P_{++}$, где

$$P_{++} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(H_i) \in \mathbb{N} \text{ для всех } i = 1, \ldots, r\}.$$

Веса из множества P_{++} иногда называются *строго доминантными.*

В этих обозначениях формулы из теорем 31, 33 и 34 выглядят еще более изящно:

$$\operatorname{ch} \widetilde{L}(\lambda) = \sum_{w\in W} \varepsilon(w) \operatorname{ch} \widetilde{M}(w\lambda) = \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, \mathrm{e}^{w\lambda}}{\prod_{\alpha\in R_+} \left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}}\right)} = \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, \mathrm{e}^{w\lambda}}{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, \mathrm{e}^{w\rho}}.$$

Замечание 20. Переформулировка формулы Вейля для характера из теоремы 34 ведет к важному объекту — т.наз. *резольвенте Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда* (сокращенно, *БГГ-резольвенте*) для простого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля. Что это такое — будет объяснено позже.

Из формулы Вейля для характера легко получить "явную" формулу для $\dim L(\lambda)_\mu$ в терминах функции Костанта.

Следствие 35 (формула Костанта для кратности). *Пусть $\lambda \in P_+$. Тогда для каждого $\mu \in P$*

$$\dim L(\lambda)_\mu = \sum_{w\in W} \varepsilon(w) p\left(w(\lambda+\rho) - \rho - \mu\right).$$

Доказательство. Согласно следствию 28,

$$\operatorname{ch} M(\lambda) = \sum_{\nu} p(\nu)\,\mathrm{e}^{\lambda-\nu} = \sum_{\mu} p(\lambda-\mu)\,\mathrm{e}^{\mu}\,.$$

Поэтому по теореме 34

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \sum_{w\in W} \varepsilon(w) \operatorname{ch} M(w(\lambda+\rho)-\rho) = \sum_{\mu}\sum_{w\in W} \varepsilon(w) p\left(w(\lambda+\rho)-\rho-\mu\right)\mathrm{e}^{\mu},$$

что и требовалось доказать. □

Эта формула не очень-то удобна для практических вычислений (например, из нее не вполне очевидно даже, что $\dim L(\lambda)_\lambda = 1$). Имеется и более удобная рекуррентная формула для кратностей.

Предложение 36. *Пусть $\lambda \in P_+$. Тогда для каждого веса μ модуля $L(\lambda)$, отличного от λ,*

$$\dim L(\lambda)_\mu = -\sum_{w\in W\setminus\{1\}} \varepsilon(w) \dim L(\lambda)_{\mu+\rho-w\rho}.$$

Доказательство. По формуле Вейля для характера,

$$\begin{aligned}\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\,\mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)} = \operatorname{ch} L(\lambda) \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\,\mathrm{e}^{w\rho} = \sum_{\nu}\sum_{w\in W} \varepsilon(w) \dim L(\lambda)_\nu\,\mathrm{e}^{\nu+w\rho} = \\ = \sum_{\mu}\sum_{w\in W} \varepsilon(w) \dim L(\lambda)_{\mu+\rho-w\rho}\,\mathrm{e}^{\mu+\rho}\,.\end{aligned} \tag{1}$$

Пусть μ — вес $L(\lambda)$, $\mu \neq \lambda$.

Упражнение 26. Проверьте, что $\|\lambda+\rho\|^2 > \|\mu+\rho\|^2$. (Решение. Заметим, что $\|\lambda+\rho\|^2 - \|\mu+\rho\|^2 = \|\lambda\|^2 - \|\mu\|^2 + 2\langle\lambda-\mu,\rho\rangle$. Мы видели, что $\|\lambda\|^2 \geq \|\mu\|^2$. Кроме того, так как $\lambda > \mu$, то $\langle\lambda-\mu,\rho\rangle > 0$. Поэтому $\|\lambda+\rho\|^2 - \|\mu+\rho\|^2 > 0$.)

Так как $\|w(\lambda+\rho)\|^2 = \|\lambda+\rho\|^2$ для всех $w \in W$, то коэффициент при $\mathrm{e}^{\mu+\rho}$ в правой части формулы (1) равен 0. Итак, $\sum_{w\in W} \varepsilon(w) \dim L(\lambda)_{\mu+\rho-w\rho} = 0$. □

В каком смысле эта формула является рекуррентной?

Предложение 37. *Если $w \in W$, $w \neq 1$, то $\rho > w\rho$.*

Доказательство. Положим $R_+^w = \{\alpha \mid \alpha \in R_+, w^{-1}\alpha \in R_-\}$. Тогда

$$w\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+} w\alpha = \rho - \sum_{\beta\in R_+^w} \beta,$$

поэтому $\rho \geq w\rho$. Если $\rho = w\rho$, то $R_+^w = \varnothing$, т.е. $w(R_+) = R_+$. Так как группа Вейля действует на множестве систем положительных корней просто транзитивно, то $w = 1$. □

Таким образом, $\mu < \mu + \rho - w\rho$ для всех $w \neq 1$, и формула из предложения 36 позволяет выразить кратность веса μ через кратности весов, больших его; "начальным условием" служит равенство $\dim L(\lambda)_\lambda = 1$. Например, пользуясь этой формулой, нетрудно заново получить правило для вычисления кратностей весов простых конечномерных $\mathfrak{sl}(3)$-модулей (см. задачу 16).

Замечание 21 (формула Фрейденталя). Известна еще одна рекуррентная формула для кратностей весов простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей — т.наз. *формула Фрейденталя.* Именно, если $\lambda \in P_+$, μ — вес модуля $L(\lambda)$, $\mu \neq \lambda$, то

$$\dim L(\lambda)_\mu = \frac{2}{\|\lambda+\rho\|^2 - \|\mu+\rho\|^2} \sum_{\alpha \in R_+} \sum_{k \geq 1} \langle \mu + k\alpha, \alpha \rangle \dim L(\lambda)_{\mu+k\alpha}.$$

Очевидно, в сумме в правой части равенства лишь конечное число ненулевых слагаемых.

Из формулы Фрейденталя можно вывести формулу Вейля для характера (исторически это было первое чисто алгебраическое доказательство последней). Доказательство формулы Фрейденталя и примеры вычислений с ее помощью см. Хамфри, §22.

Из формулы Вейля для характера можно также вывести формулу для размерности простого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля с данным старшим весом.

Для этого заметим, что если $\mathfrak{g}$-модуль V конечномерен, то его характер представляет собой конечную сумму, поэтому можно интерпретировать $\operatorname{ch} V = \sum_\mu (\dim V_\mu)\, \mathrm{e}^\mu$ как функцию на $\mathfrak{h}$, заданную формулой $(\operatorname{ch} V)(h) = \sum_\mu (\dim V_\mu) \exp \mu(h)$ при $h \in \mathfrak{h}$ (или как функцию на $\mathfrak{h}^*$, заданную формулой $(\operatorname{ch} V)(\lambda) = \sum_\mu (\dim V_\mu) \exp\langle \lambda, \mu \rangle$ при $\lambda \in \mathfrak{h}^*$). Очевидно, $\dim V = (\operatorname{ch} V)(0)$.

Теорема 38 (формула Г. Вейля для размерности). *Пусть* $\lambda \in P_+$. *Тогда*

$$\dim L(\lambda) = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\langle \rho, \alpha \rangle}.$$

Доказательство. Просто подставить 0 в формулу Вейля не получится, ибо получается "неопределенность $\frac{0}{0}$". Поэтому надо избавиться от нее, сделав подходящий предельный переход. Именно, $\dim L(\lambda) = \lim_{t\to 0} (\operatorname{ch} L(\lambda))(t\rho)$. Как вычислить этот предел?

Из формулы Вейля для знаменателя следует, что для каждого $\nu \in \mathfrak{h}^*$

$$\begin{aligned}\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp\langle w\nu, t\rho \rangle &= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp\left(t\langle \nu, w^{-1}\rho \rangle\right) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp\left(t\langle \nu, w\rho \rangle\right) = \\ &= \prod_{\alpha \in R_+} \left(\exp\left(\frac{t\langle \nu, \alpha\rangle}{2}\right) - \exp\left(-\frac{t\langle \nu, \alpha\rangle}{2}\right)\right) = \\ &= \prod_{\alpha \in R_+} \left(2\sinh\left(\frac{t\langle \nu, \alpha\rangle}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Полагая $\nu = \lambda + \rho$ и $\nu = \rho$, мы получаем, что

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp\langle w(\lambda+\rho), t\rho\rangle = \prod_{\alpha \in R_+} \left(2 \sinh \left(\frac{t\langle \lambda+\rho, \alpha\rangle}{2} \right) \right),$$
$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp\langle w\rho, t\rho\rangle = \prod_{\alpha \in R_+} \left(2 \sinh \left(\frac{t\langle \rho, \alpha\rangle}{2} \right) \right).$$

Поэтому

$$\dim L(\lambda) = \lim_{t \to 0} (\operatorname{ch} L(\lambda))(t\rho) = \lim_{t \to 0} \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\sinh\left(\frac{t\langle \lambda+\rho,\alpha\rangle}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{t\langle \rho,\alpha\rangle}{2}\right)} = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\langle \lambda+\rho, \alpha\rangle}{\langle \rho, \alpha\rangle},$$

что и требовалось доказать. □

Пример 12. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ определим функцию $t_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ формулой $t_i(h) = \exp \varepsilon_i(h)$ (см. пример 4; отметим, что $t_1 t_2 \dots t_n = 1$). Будем отождествлять элементы кольца $\mathbb{Z}[P]$ с функциями на $\mathfrak{h}$; если $\lambda = m_1\varepsilon_1 + \ldots + m_n\varepsilon_n$, то при этом отождествлении $e^\lambda = t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$. Заметим, что $\rho = \varpi_1 + \ldots + \varpi_{n-1} = (n-1)\varepsilon_1 + (n-2)\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}$. Вспомним, что группа Вейля $W = S_n$ действует перестановками на $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Поэтому формула Вейля для характера приобретает следующий вид: если $\lambda = m_1\varepsilon_1 + \ldots + m_n\varepsilon_n \in P_+$ (т.е. $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n$, и можно считать, что $m_i \in \mathbb{N}$), то

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in S_n} \operatorname{sign}(w) t_{w(1)}^{m_1+n-1} t_{w(2)}^{m_2+n-2} \dots t_{w(n)}^{m_n}}{\sum_{w \in S_n} \operatorname{sign}(w) t_{w(1)}^{n-1} t_{w(2)}^{n-2} \dots t_{w(n)}^{0}} =$$
$$= \begin{vmatrix} t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_{n-1}^{n-1} & t_n^{n-1} \\ t_1^{n-2} & t_2^{n-2} & \dots & t_{n-1}^{n-2} & t_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} & t_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} t_1^{m_1+n-1} & t_2^{m_1+n-1} & \dots & t_{n-1}^{m_1+n-1} & t_n^{m_1+n-1} \\ t_1^{m_2+n-2} & t_2^{m_2+n-2} & \dots & t_{n-1}^{m_2+n-2} & t_n^{m_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_1^{m_{n-1}+1} & t_2^{m_{n-1}+1} & \dots & t_{n-1}^{m_{n-1}+1} & t_n^{m_{n-1}+1} \\ t_1^{m_n} & t_2^{m_n} & \dots & t_{n-1}^{m_n} & t_n^{m_n} \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j) \right)^{-1} \begin{vmatrix} t_1^{m_1+n-1} & t_2^{m_1+n-1} & \dots & t_{n-1}^{m_1+n-1} & t_n^{m_1+n-1} \\ t_1^{m_2+n-2} & t_2^{m_2+n-2} & \dots & t_{n-1}^{m_2+n-2} & t_n^{m_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_1^{m_{n-1}+1} & t_2^{m_{n-1}+1} & \dots & t_{n-1}^{m_{n-1}+1} & t_n^{m_{n-1}+1} \\ t_1^{m_n} & t_2^{m_n} & \dots & t_{n-1}^{m_n} & t_n^{m_n} \end{vmatrix}.$$

Упражнение 27. Проверьте, что для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ формула Вейля для размерности приобретает следующий вид:

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (l_i - l_j)}{1!2! \dots (n-1)!}.$$

Здесь $\lambda = m_1\varepsilon_1 + \ldots + m_n\varepsilon_n \in P_+$, $l_i = m_i - i$.

Вот еще несколько следствий из формулы Вейля для характера. Прежде всего, характеры можно использовать для разложения конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей в прямую сумму простых. Именно, пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, $\lambda \in P_+$, $c(V, L(\lambda))$ — кратность вхождения $L(\lambda)$ в V, т.е.

$$V \simeq \bigoplus_{\lambda \in P_+} c(V, L(\lambda)) L(\lambda).$$

Упражнение 28. Докажите, что число $c(V, L(\lambda))$ равно коэффициенту при $\mathrm{e}^{\lambda+\rho}$ в $D \cdot \operatorname{ch} V$, где $D = \prod_{\alpha \in R_+} \left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Отсюда следует, что конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется своим характером:

Упражнение 29. Пусть V_1 и V_2 — конечномерные $\mathfrak{g}$-модули. Докажите, что если $\operatorname{ch} V_1 = \operatorname{ch} V_2$, то $V_1 \simeq V_2$. (Указание: запишите V_1 и V_2 в виде прямой суммы простых подмодулей.)

Для случая, когда V — тензорное произведение простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей, можно получить более конкретные формулы для $c(V, L(\lambda))$.

Упражнение 30. Пусть $\lambda, \mu, \nu \in P_+$. Тогда

$$c(L(\lambda) \otimes L(\mu), L(\nu)) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \dim L(\mu)_{\nu - (w(\lambda+\rho) - \rho)}.$$

Упражнение 31 (формула Стейнберга). Пусть $\lambda, \mu, \nu \in P_+$. Тогда

$$c(L(\lambda) \otimes L(\mu), L(\nu)) = \sum_{w, w' \in W} \varepsilon(ww') p\left(w(\lambda+\rho) - \rho + w'(\mu+\rho) - \rho - \nu\right).$$

Пример 13 (формула Клебша-Гордона). Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \geq \mu$. Разложим $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ на простые $\mathfrak{g}$-модули. Воспользуемся результатом упражнения 30. Напомним, что при отождествлении $\mathfrak{h}^*$ с $\mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \lambda(H)$, оказывается, что $\rho = 1$, и неединичный элемент $w \in W = S_2$ действует по формуле $w(x) = -x$. Если $\nu \in \mathbb{Z}_+$, то $c(L(\lambda) \otimes L(\mu), L(\nu)) = \dim L(\mu)_{\nu-\lambda} - \dim L(\mu)_{\nu+\lambda+2}$. Заметим, что $\dim L(\mu)_{\nu+\lambda+2} = 0$ при всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Далее, положим $\nu = \lambda + \mu - 2k$. Тогда $\dim L(\mu)_{\nu-\lambda} = \dim L(\mu)_{\mu-2k} = 1$ при $k = 0, 1, \ldots, \mu$ и 0 в остальных случаях. Таким образом, $c(L(\lambda) \otimes L(\mu), L(\nu)) = 1$ при $\nu = \lambda+\mu, \lambda+\mu-2, \ldots, \lambda+\mu-2\mu = \lambda-\mu$ и 0 в остальных случаях. Окончательно,

$$L(\lambda) \otimes L(\mu) = L(\lambda+\mu) \oplus L(\lambda+\mu-2) \oplus \ldots \oplus L(\lambda-\mu).$$

Тот же результат можно получить и по формуле Стейнберга. Достаточно заметить, что $\alpha = 2$ — (единственный) положительный корень $\mathfrak{g}$, и $p(k\alpha) = 1$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ и 0 в остальных случаях.

5. Центральные характеры. Доказательство формулы Вейля для характера

Теперь приступим к доказательству формулы Вейля для характера. Для этого нам понадобится ряд определений и результатов, многие из которых имеют большое самостоятельное значение.

Пусть $Z = Z(U\mathfrak{g})$ — центр алгебры $U\mathfrak{g}$, т.е.

$$Z = \{z \in U\mathfrak{g} \,|\, za = az \text{ для всех } a \in U\mathfrak{g}\}.$$

Очевидно, Z является коммутативной подалгеброй в $U\mathfrak{g}$ (содержащей единицу). Если V — $\mathfrak{g}$-модуль и $z \in Z$, то, очевидно, $zav = azv$ при всех $a \in U\mathfrak{g}$ и $v \in V$. Иными словами, оператор "умножения на z" в пространстве V является эндоморфизмом $\mathfrak{g}$-модуля V.

Предположим, что V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Согласно лемме Шура, любой эндоморфизм V (как $\mathfrak{g}$-модуля) является скалярным. Это значит, что если $z \in Z$, то $zv = \chi(z)v$ для всех $v \in V$, где $\chi(z) \in \mathbb{C}$. Очевидно, $\chi : Z \to \mathbb{C}$ является морфизмом алгебр (с единицей). Это мотивирует следующее определение:

Определение 4. Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль, $V \neq 0$, $\chi : Z \to \mathbb{C}$ — морфизм алгебр. Скажем, что V *имеет центральный характер* χ, если $zv = \chi(z)v$ для всех $z \in Z$ и $v \in V$.

Замечание 22. 1) Итак, V имеет центральный характер, если все элементы Z действуют на V умножением на скаляр. Если это так, то центральный характер определен однозначно. Будем обозначать его χ_V.

2) Если $\mathfrak{g}$-модуль V имеет центральный характер, то все его ненулевые подмодули и фактормодули также имеют центральный характер, причем тот же самый. Более общо, любой ненулевой подфактор (т.е. фактормодуль подмодуля) V имеет тот же центральный характер.

3) Не всякий (даже конечномерный) $\mathfrak{g}$-модуль обладает центральным характером. Тем не менее можно доказать, что каждый простой $\mathfrak{g}$-модуль (не обязательно конечномерный) им обладает. Нетрудно доказать в этом случае аналог леммы Шура, т.е. скалярность любого $\mathfrak{g}$-модульного эндоморфизма.

4) Не следует путать характеры с центральными характерами.

Предложение 39. *Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом. Тогда V имеет центральный характер.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ — старший вес V, $v_0 \in V_\lambda$ — старший вектор. Пусть $z \in Z$. Очевидно, $zv_0 \in V_\lambda$, и так как $\dim V_\lambda = 1$, то $zv_0 = cv_0$, где $c \in \mathbb{C}$. Так как $V = (U\mathfrak{g})v_0$, то $zv = cv$ для всех $v \in V$, что и требовалось доказать. □

Обозначим через χ_λ центральный характер модуля Верма $M(\lambda)$. Так как каждый модуль V со старшим весом λ является фактором модуля $M(\lambda)$, то $\chi_V = \chi_\lambda$.

Чтобы “вычислить” χ_λ, нужно для начала привести нетривиальные примеры элементов из Z. Для нужд доказательства формулы Вейля для характера нам будет достаточно всего одного такого примера.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — произвольный базис в $\mathfrak{g}$, $f_1, \dots, f_n$ — двойственный к нему (относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$) базис, т.е. $\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ для всех i, j.

Положим $C := \sum_i e_i f_i \in U\mathfrak{g}$.

Упражнение 32. Проверьте, что элемент C не зависит от произвола в выборе исходного базиса $e_1, \dots, e_n$. (Указание: C — это образ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ при естественном отображении

$$\mathrm{Bilin}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathbb{C}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^* = \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \xrightarrow{m} U\mathfrak{g}\ ;$$

здесь $\mathrm{Bilin}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathbb{C})$ — пространство всех билинейных форм в $\mathfrak{g}$, изоморфизм $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ индуцирован формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а m — это умножение в $U\mathfrak{g}$.)

Таким образом, C зависит только от выбора инвариантного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (при нашем соглашении о $\langle \cdot, \cdot \rangle$ элемент C определен с точностью до умножения на ненулевой скаляр). Элемент C называется *квадратичным элементом Казимира* в $U\mathfrak{g}$ (на жаргоне — квадратичным казимиром или просто казимиром).

Предложение 40. *$C \in Z$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $Cx = xC$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. В самом деле,

$$Cx = \sum_i e_i f_i x = \sum_i e_i x f_i + \sum_i e_i [f_i, x],$$

$$xC = \sum_i x e_i f_i = \sum_i e_i x f_i + \sum_i [x, e_i] f_i.$$

Так как $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ — базисы в $\mathfrak{g}$, то $[x, e_i] = \sum_j \alpha_{ij} e_j$, $[f_i, x] = \sum_j \beta_{ij} f_j$ (где числа $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{C}$, разумеется, зависят от x). Тогда

$$\sum_i e_i [f_i, x] = \sum_{i,j} \beta_{ij} e_i f_j,$$

$$\sum_j [x, e_j] f_j = \sum_{i,j} \alpha_{ji} e_i f_j.$$

Наконец,

$$\beta_{ij} = \sum_k \beta_{ik} \langle f_k, e_j \rangle = \langle [f_i, x], e_j \rangle = \langle f_i, [x, e_j] \rangle = \sum_k \alpha_{jk} \langle f_i, e_k \rangle = \alpha_{ji},$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 41. *$\chi_\lambda(C) = \langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle = \|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2$.*

Доказательство. Выберем базис в $\mathfrak{g}$, удобный для вычисления C. Именно, для каждого $\alpha \in R_+$ выберем элементы $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ и $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ так, чтобы $\langle E_\alpha, E_{-\alpha} \rangle = 1$. Пусть $h_1, \ldots, h_r$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{h}$. Тогда

$$C = \sum_{\alpha \in R_+} (E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_\alpha) + \sum_{i=1}^r h_i^2.$$

Заметим, что $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = t_\alpha$, где $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ — элемент, соответствующий α при изоморфизме $\mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{h}$ (т.е. $\lambda(t_\alpha) = \langle \lambda, \alpha \rangle$ для всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$). Поэтому

$$C = \sum_{\alpha \in R_+} (2E_{-\alpha} E_\alpha + t_\alpha) + \sum_{i=1}^r h_i^2.$$

Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ и старшим вектором v_0. Тогда

$$Cv_0 = \sum_{\alpha \in R_+} t_\alpha v_0 + \sum_{i=1}^r h_i^2 v_0 = \left(\sum_{\alpha \in R_+} \langle \lambda, \alpha \rangle + \sum_{i=1}^r \lambda(h_i)^2 \right) v_0 = (2\langle \lambda, \rho \rangle + \langle \lambda, \lambda \rangle) \, v_0,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 42. *Пусть веса $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ таковы, что $\chi_\lambda = \chi_\mu$. Тогда $\langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle = \langle \mu, \mu + 2\rho \rangle$, т.е. $\|\lambda + \rho\|^2 = \|\mu + \rho\|^2$.* □

Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$. Положим $S_\lambda = \{\mu \in \lambda - Q_+ \mid \|\mu + \rho\|^2 = \|\lambda + \rho\|^2\}$. Так как S_λ — это пересечение дискретного $(\lambda - Q_+)$ и компактного (сфера) подмножеств в $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$, то $|S_\lambda| < \infty$.

Предложение 43. *Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль со следующими свойствами:*
1) V имеет характер, причем все веса V содержатся в множестве $\lambda - Q_+$;
2) V имеет центральный характер χ_λ.
Тогда

$$\operatorname{ch} V = \sum_{\mu \in S_\lambda} c_\mu \operatorname{ch} M(\mu),$$

где $c_\mu \in \mathbb{Z}$.

Прежде чем доказывать это предложение, обсудим одно простое свойство характеров.

Лемма 44. *Пусть M — $\mathfrak{g}$-модуль, имеющий характер, $L \subset M$ — подмодуль. Тогда $\mathfrak{g}$-модули L и M/L имеют характер, причем $\operatorname{ch} M = \operatorname{ch} L + \operatorname{ch} M/L$.*

Доказательство. Нам дано, что $M = \bigoplus_\mu M_\mu$, причем все V_μ конечномерны. Тогда $L = \bigoplus_\mu L_\mu$, где $L_\mu = L \cap M_\mu$ (причина: ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство полупросто). Поэтому $M/L = \bigoplus_\mu (M/L)_\mu$, где $(M/L)_\mu = M_\mu / L_\mu$. Таким образом, $\dim M_\mu = \dim L_\mu + \dim(M/L)_\mu$ для каждого $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Поэтому $\operatorname{ch} M = \operatorname{ch} L + \operatorname{ch} M/L$. □

Следствие 45. *Пусть* $0 \to V_0 \to V_1 \to \ldots \to V_n \to 0$ *— точная последовательность* $\mathfrak{g}$*-модулей, имеющих характер. Тогда* $\sum_k (-1)^k \operatorname{ch} V_k = 0$. □

Доказательство предложения 43. Пусть μ_0 — какой-нибудь максимальный элемент в множестве весов модуля V (легко видеть, что в любом подмножестве в $\lambda - Q_+$ максимальные элементы существуют). Тогда $\mathfrak{n}_+ V_{\mu_0} = 0$. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — какой-нибудь базис в V_{μ_0}. Положим $L_i = (U\mathfrak{g})v_i$. Тогда L_i — подмодуль в V со старшим весом μ_0. Отсюда следует, что $\chi_{\mu_0} = \chi_\lambda$, т.е. $\mu_0 \in S_\lambda$ (см. следствие 42). По свойству универсальности модулей Верма, для каждого i имеется сюръективный морфизм $M(\mu_0) \to L_i$. Таким образом, возникает морфизм

$$\underbrace{M(\mu_0) \oplus \ldots \oplus M(\mu_0)}_{k} \to V;$$

его образ — это $L_1 + \ldots + L_k$. Пусть V_1^1 (соотв. V_1^2) — ядро (соотв. коядро, т.е. фактор по образу) этого морфизма. Тогда последовательность

$$0 \to V_1^1 \to \underbrace{M(\mu_0) \oplus \ldots \oplus M(\mu_0)}_{k} \to V \to V_1^2 \to 0$$

точна. Согласно следствию 45,

$$\operatorname{ch} V = k \operatorname{ch} M(\mu_0) - \operatorname{ch} V_1^1 + \operatorname{ch} V_1^2.$$

Так как отображение $(M(\mu_0) \oplus \ldots \oplus M(\mu_0))_{\mu_0} \to V_{\mu_0}$ по построению сюръективно, и при этом $\dim(M(\mu_0) \oplus \ldots \oplus M(\mu_0))_{\mu_0} = \dim V_{\mu_0} = k$, то $(M(\mu_0) \oplus \ldots \oplus M(\mu_0))_{\mu_0} \to V_{\mu_0}$ биективно. Поэтому μ_0 не является весом ни V_1^1, ни V_1^2.

Теперь заметим, что V_1^1 и V_1^2 удовлетворяют тем же условиям на характер и центральный характер, что и V. Применим к V_1^1 и V_1^2 аналогичную конструкцию. Именно, если V_1^1 (соотв. V_1^2) отличен от 0, то выберем μ_1^1 (соотв. μ_1^2) максимальным среди весов V_1^1 (соотв. V_1^2). Ясно, что $\mu_1^1, \mu_1^2 \in S_\lambda \setminus \{\mu_0\}$. Аналогично предыдущему шагу строятся точные последовательности

$$0 \to V_2^1 \to \underbrace{M(\mu_1^1) \oplus \ldots \oplus M(\mu_1^1)}_{k_1^1} \to V_1^1 \to V_2^2 \to 0,$$

$$0 \to V_2^3 \to \underbrace{M(\mu_1^2) \oplus \ldots \oplus M(\mu_1^2)}_{k_1^2} \to V_1^2 \to V_2^4 \to 0,$$

откуда

$$\operatorname{ch} V_1^1 = k_1^1 \operatorname{ch} M(\mu_1^1) - \operatorname{ch} V_2^1 + \operatorname{ch} V_2^2, \qquad \operatorname{ch} V_1^2 = k_1^2 \operatorname{ch} M(\mu_1^2) - \operatorname{ch} V_2^3 + \operatorname{ch} V_2^4.$$

При этом μ_0 и μ_1^1 (соотв. μ_0 и μ_1^2) не являются весами V_2^1 и V_2^2 (соотв. V_2^3 и V_2^4).

Далее применим аналогичные рассуждения к V_2^k, $k = 1, 2, 3, 4$, и т.д. Так как $|S_\lambda| < \infty$, то этот процесс рано или поздно остановится, т.е. $V_n^k = 0$ для всех k при достаточно большом n. □

Следствие 46.

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \sum_{\mu \in S_\lambda} c_\mu \operatorname{ch} M(\mu),$$

где $c_\mu \in \mathbb{Z}$, *причем* $c_\lambda = 1$. □

Положим для краткости

$$D = \prod_{\alpha \in R_+} \left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}} \right).$$

Так как $\operatorname{ch} M(\mu) = D^{-1} \mathrm{e}^{\mu+\rho}$, то мы получаем

Следствие 47.

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = D^{-1} \sum_{\mu \in S_\lambda} c_\mu \mathrm{e}^{\mu+\rho},$$

где $c_\mu \in \mathbb{Z}$, *причем* $c_\lambda = 1$. □

Перенесем на $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ естественное действие группы W на пространстве $\mathfrak{h}^*$, т.е. если $w \in W$, $f = \sum_\mu f(\mu)\,\mathrm{e}^\mu$, то положим $wf = \sum_\mu f(\mu)\,\mathrm{e}^{w\mu} = \sum_\mu f(w^{-1}\mu)\,\mathrm{e}^\mu$. Очевидно, $w(f_1 + f_2) = wf_1 + wf_2$, $w(f_1 \cdot f_2) = wf_1 \cdot wf_2$.

Пусть теперь $\lambda \in P_+$, т.е. $\mathfrak{g}$-модуль $L(\lambda)$ конечномерен. Как мы знаем, $\dim L(\lambda)_{w\mu} = \dim L(\lambda)_\mu$ для каждого веса $\mu \in \mathfrak{h}^*$ и $w \in W$. На языке характеров это означает, что $w \operatorname{ch} L(\lambda) = \operatorname{ch} L(\lambda)$ для всех $w \in W$, т.е. $\operatorname{ch} L(\lambda)$ является W-инвариантом.

Лемма 48. $wD = \varepsilon(w)D$ *для всех* $w \in W$.

Доказательство. Так как W порождается простыми отражениями, то достаточно проверить, что $s_iD = -D$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Напомним, что $s_i(R_+ \setminus \{\alpha_i\}) = R_+ \setminus \{\alpha_i\}$ и $s_i(\alpha_i) = \alpha_i$. Поэтому

$$s_iD = \prod_{\alpha \in R_+} \left(\mathrm{e}^{\frac{s_i(\alpha)}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{s_i(\alpha)}{2}} \right) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\alpha_i}{2}} \right) \cdot \prod_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}} \right) = -D.$$

□

Обозначим на минуту $N = \sum_{\mu \in S_\lambda} c_\mu \mathrm{e}^{\mu+\rho}$. Как мы знаем, $\operatorname{ch} L(\lambda) = \frac{N}{D}$. Так как $w \operatorname{ch} L(\lambda) = \operatorname{ch} L(\lambda)$ и $wD = \varepsilon(w)D$, то $wN = \varepsilon(w)N$ для всех $w \in W$. Итак, мы получаем, что $\sum_\mu c_\mu \mathrm{e}^{w(\mu+\rho)} = \varepsilon(w) \sum_\mu c_\mu \mathrm{e}^{\mu+\rho}$, т.е. $c_{w(\mu+\rho)-\rho} = \varepsilon(w)c_\mu$. Итак, если $c_\mu \neq 0$, то $c_{w(\mu+\rho)-\rho} \neq 0$. Более того, так как $c_\lambda = 1$, то $c_{w(\lambda+\rho)-\rho} = \varepsilon(w)$, т.е. $N = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\,\mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)} + N'$, где $N' = \sum' c_\mu \mathrm{e}^{\mu+\rho}$, и сумма $\sum'$ распространяется на веса μ из множества $S_\lambda \setminus \{w(\lambda+\rho) - \rho \,|\, w \in W\}$. Для доказательства формулы Вейля для характера остается проверить, что $N' = 0$.

Лемма 49. *Пусть* $c_\mu \neq 0$. *Тогда* $\mu = w(\lambda+\rho) - \rho$ *для некоторого* $w \in W$.

Доказательство. Так как $\mu \in S_\lambda \subset \lambda - Q_+ \subset \lambda - P$ и $\lambda \in P_+ \subset P$, то $\mu \in P$. Тогда и $\mu+\rho \in P$, поэтому найдется $w \in W$ такой, что $\mu+\rho = w(\nu+\rho)$ (т.е. $\nu = w^{-1}(\mu+\rho)-\rho$), причем $\nu + \rho \in P_+$. Так как $c_\mu \neq 0$, то и $c_\nu \neq 0$, т.е. $\nu \in S_\lambda$. Это значит, что $\|\nu + \rho\|^2 = \|\lambda+\rho\|^2$, и $\nu \in \lambda - Q_+$, т.е. $\nu = \lambda - \gamma$, где $\gamma = \sum_i k_i\alpha_i$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$. Так как $\lambda+\rho = (\nu-\rho)+\gamma$, то $\|\lambda + \rho\|^2 = \|\nu + \rho\|^2 + 2\langle\nu + \rho, \gamma\rangle + \|\gamma\|^2 \geq \|\nu + \rho\|^2 + \|\gamma\|^2$ (мы пользуемся тем, что $\langle\nu+\rho, \gamma\rangle \geq 0$ ввиду доминантности веса $\nu+\rho$). Итак, $\|\nu+\rho\|^2 = \|\lambda+\rho\|^2 \geq \|\nu+\rho\|^2+\|\gamma\|^2$. Отсюда $\gamma = 0$, т.е. $\nu = \lambda$. Окончательно, $\mu + \rho = w(\lambda + \rho)$. □

Итак, формула Вейля для характера доказана.

Сделаем несколько замечаний о резольвенте Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда.

Для каждого $w \in W$ обозначим через $l(w)$ число сомножителей в наиболее “коротком” представлении w в виде произведения простых отражений (так что, в частности, $\varepsilon(w) = (-1)^{l(w)}$). Число $l(w)$ обычно называется *длиной* w. Можно показать, что $l(w)$ равно числу тех $\alpha \in R_+$, для которых $w\alpha \in R_-$.

Из того, что группа Вейля действует на системах положительных корней просто транзитивно, следует, что существует единственный элемент $w_0 \in W$, такой, что $w_0(R_+) = R_-$. Это — единственный элемент W наибольшей длины, при этом $l(w_0) = |R_+|$.

Упражнение 33. Найдите w_0 для случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$.

Оказывается, что если $\lambda \in P_+$, то существует точная последовательность $\mathfrak{g}$-модулей (БГГ-резольвента)

$$0 \to C_m \to \ldots \to C_1 \to C_0 \to L(\lambda) \to 0,$$

где

$$C_k = \bigoplus_{w\in W,\ l(w)=k} M(w(\lambda + \rho) - \rho),$$

$m = |R_+|$. В частности, $C_0 = M(\lambda)$, $C_1 = \bigoplus_i M(s_i(\lambda + \rho) - \rho)$.

Это — глубокий результат. Формула Вейля для характера следует из него мгновенно (см. следствие 45).

Отметим, что начало БГГ-резольвенты, а именно, точная последовательность

$$\bigoplus_{i=1}^{r} M(s_i(\lambda + \rho) - \rho) \to M(\lambda) \to L(\lambda) \to 0,$$

была, по существу, нами построена (см. предложения 17 и 24 и замечание 17). “Продолжение” строится гораздо сложнее. Построение без привлечения серьезной техники возможно, но весьма громоздко.

6. Строение центра универсальной обертывающей алгебры

В этом разделе мы изучим строение центра Z универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{g}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В качестве следствия мы получим необходимые и достаточные условия равенства $\chi_\lambda = \chi_\mu$, где χ_λ — центральный характер модуля со старшим весом $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. В частности, мы увидим, что простые конечномерные $\mathfrak{g}$-модули изоморфны тогда и только тогда, когда равны их центральные характеры.

Начнем со следующего простого утверждения об алгебре $U\mathfrak{g}$.

Лемма 50. *$U\mathfrak{g} = U\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{n}_- \cdot U\mathfrak{g} + U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+)$.*

Доказательство. Выберем в $U\mathfrak{g}$ ПБВ-базис вида $Y_{\beta_1}^{q_1} \dots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \dots X_{\beta_k}^{p_k}$ (здесь $\beta_1, \dots, \beta_k$ — все положительные корни, $p_i, q_i, m_i \in \mathbb{Z}_+$). Тогда $U\mathfrak{h}$ (соотв. $\mathfrak{n}_- \cdot U\mathfrak{g} + U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+$) — линейная оболочка элементов $Y_{\beta_1}^{q_1} \dots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \dots X_{\beta_k}^{p_k}$, таких, что $p_1 + \dots + p_k + q_1 + \dots + q_k = 0$ (соотв. $p_1 + \dots + p_k + q_1 + \dots + q_k > 0$), откуда и следует наше утверждение. $\square$

Нам понадобится *присоединенное представление* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $U\mathfrak{g}$. Именно, положим $\mathrm{ad}_x a = [x, a] = xa - ax$, где $x \in \mathfrak{g}$, $a \in U\mathfrak{g}$. В силу тождества Якоби $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(U\mathfrak{g})$ — действительно представление. Иными словами, $U\mathfrak{g}$ становится $\mathfrak{g}$-модулем. Отметим, что если $x \in \mathfrak{g}$, $a, b \in U\mathfrak{g}$, то $\mathrm{ad}_x(ab) = \mathrm{ad}_x a \cdot b + a \cdot \mathrm{ad}_x b$. По индукции получаем, что если $x, x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$, то $\mathrm{ad}_x(x_1 \dots x_n) = \sum_i x_1 \dots \mathrm{ad}_x(x_i) \dots x_n$.

Из последней формулы следует, что элементы $Y_{\beta_1}^{q_1} \dots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \dots X_{\beta_k}^{p_k}$ "стандартного" ПБВ-базиса в $U\mathfrak{g}$ являются весовыми с весом $(p_1 - q_1)\beta_1 + \dots + (p_k - q_k)\beta_k$. В частности, $\mathfrak{g}$-модуль $U\mathfrak{g}$ обладает весовым разложением.

Лемма 51. *Пусть $z \in Z$. Тогда проекция z на $\mathfrak{n}_- \cdot U\mathfrak{g} + U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+$ вдоль $U\mathfrak{h}$ лежит в $(\mathfrak{n}_- \cdot U\mathfrak{g}) \cap (U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+) = \mathfrak{n}_- \cdot U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+$.*

Доказательство. По определению, $z \in Z \subset U\mathfrak{g}$ имеет вес 0 относительно присоединенного представления. Поэтому в разложение z по "стандартному" ПБВ-базису входят только элементы $Y_{\beta_1}^{q_1} \dots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \dots X_{\beta_k}^{p_k}$, у которых $(p_1 - q_1)\beta_1 + \dots + (p_k - q_k)\beta_k = 0$. Это означает, что если $p_1 + \dots + p_k + q_1 + \dots + q_k > 0$, то $p_1 + \dots + p_k > 0$ и $q_1 + \dots + q_k > 0$, т.е. соответствующий элемент $Y_{\beta_1}^{q_1} \dots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \dots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \dots X_{\beta_k}^{p_k}$ лежит в $(\mathfrak{n}_- \cdot U\mathfrak{g}) \cap (U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+) = \mathfrak{n}_- \cdot U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+$. $\square$

Пусть $\gamma : Z \to U\mathfrak{h}$ — ограничение на Z проекции $U\mathfrak{g}$ на $U\mathfrak{h}$ вдоль $\mathfrak{n}_- \cdot U\mathfrak{g} + U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+$.

Лемма 52. *γ — гомоморфизм унитальных алгебр.*

Доказательство. Равенство $\gamma(1) = 1$ очевидно по определению. Далее, пусть $z_1, z_2 \in Z$. Запишем $z_i = \gamma(z_i) + u_i$, где $u_i \in U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+$. Тогда $z_1 z_2 - \gamma(z_1)\gamma(z_2) = z_1 u_2 + \gamma(z_2) u_1 \in U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+$. Поэтому $\gamma(z_1 z_2) = \gamma(z_1)\gamma(z_2)$. $\square$

Так как подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ коммутативна, то $U\mathfrak{h} = S(\mathfrak{h})$; в частности, $U\mathfrak{h}$ тоже коммутативна. Напомним, что симметрическую алгебру $S(\mathfrak{h})$ можно естественно отождествить с алгеброй $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$ полиномиальных функций на пространстве $\mathfrak{h}^*$. В самом деле, по свойству универсальности симметрической алгебры (см. упражнение 3) любой элемент $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, т.е. линейный функционал $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, продолжается до гомоморфизма унитальных алгебр $\lambda : S(\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}$. Попросту говоря, продолжение определяется формулами $\lambda(h_1 \ldots h_m) = \lambda(h_1) \ldots \lambda(h_m)$ (где $\mathfrak{h}_1, \ldots, h_m \in \mathfrak{h}$) и $\lambda(1) = 1$. При фиксированном $a \in S(\mathfrak{h})$ формула $p_a(\lambda) = \lambda(a)$ определяет функцию $p_a : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}$. Очевидно, функция p_a полиномиальна, и так получается изоморфизм между алгебрами $S(\mathfrak{h})$ и $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$.

Предложение 53. *Пусть $z \in Z$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Тогда $\lambda(\gamma(z)) = \chi_\lambda(z)$.*

Доказательство. Пусть V — модуль со старшим весом λ и старшим вектором v_0. Тогда $\mathfrak{n}_+ v_0 = 0$, и $hv_0 = \lambda(h)v_0$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Продолжая λ на $U\mathfrak{h} = S(\mathfrak{h})$, заключаем, что $av_0 = \lambda(a)v_0$ для всех $a \in U\mathfrak{h}$.

Теперь запишем $z = \gamma(z) + u$, где $u \in \mathfrak{n}_- \cdot U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+ \subset U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}_+$. Так как $uv_0 = 0$, то $zv_0 = \gamma(z)v_0 = \lambda(\gamma(z))v_0$, что и требовалось установить. $\square$

Следствие 54. *При каждом фиксированном $z \in Z$ функция $\lambda \mapsto \chi_\lambda(z)$ полиномиальна.* $\square$

Для дальнейшего удобно немного "подправить" γ, сделав замену переменных в полиномиальных функциях на $\mathfrak{h}^*$. Именно, рассмотрим гомоморфизм $\tau : \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*) \to \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$, заданный формулой $(\tau p)(\lambda) = p(\lambda - \rho)$. (На языке $S(\mathfrak{h})$ мы сначала определяем линейное отображение $\tau : \mathfrak{h} \to S(\mathfrak{h})$, $\tau(h) = h - \rho(h) \cdot 1$, и продолжаем его до гомоморфизма $\tau : S(\mathfrak{h}) \to S(\mathfrak{h})$ по свойству универсальности симметрической алгебры.) Теперь положим $\widetilde{\gamma} = \tau\gamma : Z \to \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$. По определению, $\lambda(\widetilde{\gamma}(z)) = (\lambda - \rho)(\gamma(z))$ для всех $z \in Z$ и $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Положим $\widetilde{\chi}_\lambda(z) = \chi_{\lambda-\rho}(z)$, т.е. $\widetilde{\chi}_\lambda(z) = \lambda(\widetilde{\gamma}(z))$. Отметим, что $\widetilde{\chi}_\lambda$ — центральный характер $\mathfrak{g}$-модуля $\widetilde{M}(\lambda) = M(\lambda - \rho)$ (более общо, любого модуля со старшим весом $\lambda - \rho$).

Естественное действие группы Вейля W на пространстве $\mathfrak{h}^*$ индуцирует действие W на $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$, заданное формулой $(wp)(\lambda) = p(w^{-1}\lambda)$, где $p \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$, $w \in W$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. (В терминах $S(\mathfrak{h})$ это действие задается формулой $\lambda(wa) = (w^{-1}\lambda)(a)$, где $a \in S(\mathfrak{h})$, $w \in W$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.) По определению, это действие линейно и перестановочно с умножением в $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$. Обозначим через $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W$ подалгебру инвариантных относительно этого действия элементов в $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$ (т.е. $p \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W$ тогда и только тогда, когда $wp = p$ для всех $w \in W$).

Предложение 55. *Если $z \in Z$, то $\widetilde{\gamma}(z) \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W$.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что для всех $w \in W$ и $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ имеет место равенство $\lambda(w\widetilde{\gamma}(z)) = \lambda(\widetilde{\gamma}(z))$, т.е. $\widetilde{\chi}_{w\lambda}(z) = \widetilde{\chi}_\lambda(z)$. Так как W порождается простыми отражениями, то достаточно считать, что $w = s_i$, где $i = 1, \ldots, r$.

Далее, пусть $\lambda \in P_{++}$, т.е. $\mu = \lambda - \rho \in P_+$. Согласно предложению 24, $M(s_i(\mu+\rho)-\rho) \subset M(\mu)$ для всех $i = 1, \dots, r$. Иными словами, $\widetilde{M}(s_i\lambda) \subset \widetilde{M}(\lambda)$ для всех $i = 1, \dots, r$. Поэтому $\widetilde{\chi}_{w\lambda} = \widetilde{\chi}_\lambda$.

Итак, многочлены $\widetilde{\chi}_{w\lambda}(z)$ и $\widetilde{\chi}_\lambda(z)$ равны при $\lambda \in P_{++}$, т.е. на множестве всех точек решетки P, лежащих в фиксированном октанте. Поэтому $\widetilde{\chi}_{w\lambda}(z)$ и $\widetilde{\chi}_\lambda(z)$ равны при всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. □

Следствие 56. *Если $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ таковы, что $\mu = w\lambda$ для некоторого $w \in W$, то $\widetilde{\chi}_\lambda = \widetilde{\chi}_\mu$.* □

Замечание 23. Значения гомоморфизма γ являются инвариантами "аффинного" действия W на $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$, т.е. индуцированного действием $w : \lambda \mapsto w(\lambda+\rho)-\rho$ на $\mathfrak{h}^*$. Иными словами, если $\mu = w(\lambda+\rho)-\rho$ для некоторого $w \in W$, то $\chi_\lambda = \chi_\mu$.

Итак, мы построили гомоморфизм унитальных алгебр $\widetilde{\gamma} : Z \to \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W$.

Теорема 57 (Хариш-Чандра). *$\widetilde{\gamma}$ — изоморфизм между Z и $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W$.*

Прежде чем доказывать эту глубокую теорему, обсудим ее формулировку и некоторые следствия из нее.

Прежде всего, зачем понадобилось вводить ρ в определение изоморфизма Хариш-Чандры $\widetilde{\gamma}$? Конечно, γ тоже является изоморфизмом между Z и подалгеброй инвариантов аффинного действия W в $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$. Введение ρ в определение $\widetilde{\gamma}$ позволяет избавиться от ρ в определении действия группы Вейля на $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)$. Конечно, истинная причина "подкрутки" на ρ в другом. Напомним, что большинство наших конструкций и определений (доминантные веса, старший вес модуля, элемент ρ и т.д.) зависят от произвола в выборе системы R_+ положительных корней в R (или, что то же самое, от произвола в выборе системы простых корней в R).

Предложение 58. *$\widetilde{\gamma}$ не зависит от произвола в выборе R_+.*

Доказательство. Пусть R'_+ — другой выбор системы простых корней в R. Как известно, $R'_+ = wR_+$ для однозначно определенного элемента $w \in W$. Будем обозначать через γ' (соотв. $\widetilde{\gamma}'$) аналог γ (соотв. $\widetilde{\gamma}$), построенный по R'_+.

Рассмотрим теперь вес $\mu \in P_+$ (где P_+ понимается в смысле R_+). Пусть $V = L(\mu)$.

Упражнение 34. Старший вес V относительно $R'_+ = wR_+$ равен $w\mu$.

Согласно предложению 53, $\mu(\gamma(z)) = \chi_\mu(z) = (w\mu)(\gamma'(z))$ для всех $z \in Z$. Теперь положим $\lambda = \mu + \rho \in P_{++}$. По определению, $\lambda(\widetilde{\gamma}(z)) = \mu(\gamma(z))$. С другой стороны, $(w\lambda)(\widetilde{\gamma}'(z)) = (w\mu + w\rho)(\widetilde{\gamma}'(z)) = (w\mu + \rho')(\widetilde{\gamma}'(z)) = (w\mu)(\gamma'(z))$ (здесь ρ' — это полусумма корней из R'_+). Наконец, так как значения $\widetilde{\gamma}'$ являются W-инвариантными, то $\lambda(\widetilde{\gamma}'(z)) = (w\lambda)(\widetilde{\gamma}'(z)) = (w\mu)(\gamma'(z)) = \mu(\gamma(z) = \lambda(\widetilde{\gamma}(z))$.

Итак, равенство $\lambda(\widetilde{\gamma}'(z)) = \lambda(\widetilde{\gamma}(z))$ проверено для всех $\lambda \in P_{++}$. Так как левая и правая части этого равенства — полиномиальные функции на $\mathfrak{h}^*$, то равенство верно для всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. □

Замечание 24. Мы видели в доказательстве предложения 58, что γ, в отличие от $\widetilde{\gamma}$, зависит от того, как выбрана R_+. Именно, если $R'_+ = wR_+$, то $\mu(\gamma(z)) = (w\mu)(\gamma'(z))$, т.е. $\gamma'(z) = w\gamma(z)$. “Разгадка” независимости $\widetilde{\gamma}$ от выбора R_+ заключается в том, что $\widetilde{\gamma}$ определяется через γ и ρ, а ρ тоже зависит от выбора R_+, и эти “зависимости” уничтожаются.

Пример 14. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, X, Y, H — “стандартный” базис в $\mathfrak{g}$, $\langle x, y\rangle = \operatorname{Tr} xy$. Легко проверить, что квадратичный казимир C в этом случае равен $\frac{1}{2}H^2 + XY + YX$. При стандартном выборе положительного корня α имеем $\mathfrak{n}_+ = \mathbb{C}X$. Так как $[X, Y] = H$, то $C = \frac{1}{2}H^2 + H + 2YX$, поэтому $\gamma(C) = \frac{1}{2}H^2 + H$. С другой стороны, если $R'_+ = \{-\alpha\}$, то роли X и Y меняются, и так как $C = \frac{1}{2}H^2 - H + 2XY$, то $\gamma'(C) = \frac{1}{2}H^2 - H$.

Из формулы $\lambda(\widetilde{\gamma}(C)) = (\lambda - \rho)(\gamma(C))$ (и того, что $\rho = 1$) легко получить, что $\widetilde{\gamma}(C) = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}$. Использование γ' дает тот же результат.

Отметим еще, что единственный неединичный элемент $w \in W = S^2$ действует на $\operatorname{Pol}(\mathfrak{h}^*) = \mathbb{C}[H]$ по формуле $w(H) = -H$ (проверьте). Поэтому $\operatorname{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W = \mathbb{C}[H^2]$. Так как $\widetilde{\gamma}(C) = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}$, то $\operatorname{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W = \mathbb{C}[\widetilde{\gamma}(C)]$. Таким образом, изоморфизм Хариш-Чандры дает в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ равенство $Z = \mathbb{C}[C]$.

Замечание 25. Можно доказать, что $\operatorname{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$, где $r = \dim \mathfrak{h} = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$. В силу изоморфизма Хариш-Чандры $Z = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_r]$, где $z_1, \ldots, z_r$ — некоторые элементы Z.

Изоморфизм Хариш-Чандры позволяет получить дополнительную информацию о строении центральных характеров.

Следствие 59. *Если $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, то $\widetilde{\chi}_\lambda = \widetilde{\chi}_\mu$ тогда и только тогда, когда $\mu = w\lambda$ для некоторого $w \in W$.*

Доказательство. Мы уже доказали, что если $W\lambda = W\mu$, то $\widetilde{\chi}_\lambda = \widetilde{\chi}_\mu$ (см. следствие 56). Обратно, пусть $W\lambda \neq W\mu$. Докажем, что $\widetilde{\chi}_\lambda \neq \widetilde{\chi}_\mu$. Для этого выберем $p \in \operatorname{Pol}(\mathfrak{h}^*)$ так, чтобы $p(W\lambda) = 1$, $p(W\mu) = 0$. Заменяя p на $\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} wp$, можно считать, что $p \in \operatorname{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W$. В силу изоморфизма Хариш-Чандры найдется элемент $z \in Z$ такой, что $\widetilde{\gamma}(z) = p$. Иными словами, $\widetilde{\chi}_\nu(z) = p(\nu)$ для всех $\nu \in \mathfrak{h}^*$. В частности, $\widetilde{\chi}_\lambda(z) = 1 \neq 0 = \widetilde{\chi}_\mu$. $\square$

Замечание 26. В терминах χ_λ получаем, что $\chi_\lambda = \chi_\mu$ тогда и только тогда, когда $\mu = w(\lambda + \rho) - \rho$ для некоторого $w \in W$.

Замечание 27. Пусть $\lambda, \mu \in P_+$. Если $\chi_\lambda = \chi_\mu$, то $\mu = w(\lambda + \rho) - \rho$ для некоторого $w \in W$. Иными словами, $\mu + \rho = w(\lambda + \rho)$, и $\lambda + \rho, \mu + \rho \in P_{++}$. Можно доказать (для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ это очевидно, ср. доказательство предложения 12), что в этой ситуации $w = 1$, т.е. $\lambda = \mu$. Итак, если центральные характеры простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей равны, то эти $\mathfrak{g}$-модули изоморфны. Очевидно, что верно и обратное: центральные характеры изоморфных $\mathfrak{g}$-модулей равны.

Замечание 28. С помощью изоморфизма Хариш-Чандры можно доказать, что любой гомоморфизм алгебр $\chi : Z \to \mathbb{C}$ имеет вид χ_λ для некоторого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ (определенного с точностью до аффинного действия группы Вейля W). Тем самым все центральные характеры исчерпываются характерами χ_λ.

Схема доказательства теоремы 57. Идея доказательства заключается в том, чтобы свести утверждение об изоморфизме Хариш-Чандры к аналогичному (но более простому) утверждению об алгебре $S(\mathfrak{g})$.

Шаг 1. Напомним, что алгебра $U\mathfrak{g}$ наделена канонической фильтрацией $U_0\mathfrak{g} \subset U_1\mathfrak{g} \subset \ldots \subset U_n\mathfrak{g} \subset \ldots$, $U\mathfrak{g} = \cup_{n\geq 0} U_n\mathfrak{g}$, а алгебра $S(\mathfrak{g})$ — естественной градуировкой $S(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\geq 0} S^n(\mathfrak{g})$. Полагая $S_n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{0\leq k\leq n} S^k(\mathfrak{g})$, мы получим фильтрацию в алгебре $S(\mathfrak{g})$. Очевидно, $\operatorname{gr} S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$.

Теперь определим т.наз. *каноническое отображение* $\phi : S(\mathfrak{g}) \to U\mathfrak{g}$. Именно, если $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$, то положим $\phi(x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$ (здесь произведения вычисляются в $S(\mathfrak{g})$ в левой части равенства и в $U\mathfrak{g}$ в правой). Распространим ϕ на всю алгебру $S(\mathfrak{g})$ по линейности.

Упражнение 35. Определение ϕ корректно.

Согласно лемме 7, $\phi(x_1 \ldots x_n) \in x_1 \ldots x_n + U_{n-1}\mathfrak{g}$. Иными словами, ϕ “уважает” фильтрации в $U\mathfrak{g}$ и в $S(\mathfrak{g})$, и соответствующее отображение $\operatorname{gr}\phi : \operatorname{gr} S(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ тождественно (напомним, что алгебра $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ естественно изоморфна $S(\mathfrak{g}) = \operatorname{gr} S(\mathfrak{g})$ — см. задачу 7).

Упражнение 36. Отображение ϕ биективно.

Пусть $\theta : U\mathfrak{g} \to S(\mathfrak{g})$, $\theta = \phi^{-1}$. Тогда $\theta(x_1 \ldots x_n) \in x_1 \ldots x_n + S_{n-1}(\mathfrak{g})$.

Напомним, что пространство $S^n(\mathfrak{g})$ наследует из $T^n(\mathfrak{g})$ структуру $\mathfrak{g}$-модуля (предполагается, что $\mathfrak{g}$ наделена структурой $\mathfrak{g}$-модуля с помощью присоединенного представления). Поэтому и $S(\mathfrak{g})$ является $\mathfrak{g}$-модулем. Алгебра $U\mathfrak{g}$ также является $\mathfrak{g}$-модулем относительно присоединенного представления.

Упражнение 37. Отображение ϕ — морфизм $\mathfrak{g}$-модулей.

Предостережение: ϕ не является морфизмом алгебр!

Напомним, что через $V^{\mathfrak{g}}$ обозначается подпространство инвариантов $\mathfrak{g}$-модуля V, т.е. векторов $v \in V$, таких, что $xv = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Отметим, что $(U\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = Z$. Таким образом, ограничение θ на Z индуцирует изоморфизм $\theta : Z \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Шаг 2. Построим естественный гомоморфизм алгебр $\eta : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$.

Отождествим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, а также $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$ с помощью $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Тогда $S(\mathfrak{g}) = \operatorname{Pol}(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{h}) = \operatorname{Pol}(\mathfrak{h})$. Если, скажем, $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$, то $x_1 \ldots x_n \in S(\mathfrak{g})$ индуцирует полиномиальную функцию на $\mathfrak{g}$, заданную формулой $x \mapsto \langle x_1 \ldots x_n, x\rangle := \langle x_1, x\rangle \ldots \langle x_n, x\rangle$.

Рассмотрим гомоморфизм $\eta : \operatorname{Pol}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{Pol}(\mathfrak{h})$, сопоставляющий полиномиальной функции на $\mathfrak{g}$ ее ограничение на $\mathfrak{h}$.

Если $a = Y_{\beta_1}^{q_1} \ldots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \ldots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \ldots X_{\beta_k}^{p_k} \in S(\mathfrak{g})$, $h \in \mathfrak{h}$, то $\langle a, h \rangle = 0$ при $p_1 + \ldots + p_k + q_1 + \ldots + q_k > 0$. Поэтому $\eta(a) = 0$ при $p_1 + \ldots + p_k + q_1 + \ldots + q_k > 0$ и $\eta(a) = a$ при $p_1 + \ldots + p_k + q_1 + \ldots + q_k = 0$.

Теорема 60. *Гомоморфизм η переводит $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ в $S(\mathfrak{h})^W$, и так получается изоморфизм алгебр $\eta : S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^W$.*

Это и есть аналог изоморфизма Хариш-Чандры для $S(\mathfrak{g})$. Доказательство этого факта см. Диксмье, §7.3.

Пример 15. Проиллюстрируем на примере $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, почему теорема 60 проще, чем теорема 57. Пусть X, Y, H — "стандартный" базис в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$. Мы видели, что $S(\mathfrak{h})^W = \mathbb{C}[H^2]$. С другой стороны, опишем $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Если $a = \sum a_{klm} Y^k H^l X^m \in S(\mathfrak{g})$, то $a \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ad}_H a = \mathrm{ad}_X a = \mathrm{ad}_Y a = 0$. Так как $\mathrm{ad}_H Y^k H^l X^m = 2(m-k) Y^k H^l X^m$, то можно считать, что $a = \sum a_{kl} X^k Y^k H^l$. Далее, легко сосчитать (проделайте это!), что $\mathrm{ad}_X a = \sum (k a_{k,l-1} - 2(l+1) a_{k-1,l+1}) X^k Y^{k-1} H^l$. Поэтому можно считать, что $k a_{k,l-1} = 2(l+1) a_{k-1,l+1}$. Легко проверить, что вычисление $\mathrm{ad}_Y a$ дает то же самое условие. Теперь нетрудно явно описать $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$:

Упражнение 38. Пространство $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ состоит из элементов $a = \sum a_{kl} X^k Y^k H^l$, таких, что $a_{kl} = 0$ при нечетном l и $a_{kl} = 2^k \frac{(l+2)(l+4)\ldots(l+2k)}{k!} a_{0,l+2k}$ при четном l.

Теперь очевидно, что если $a = \sum a_{kl} X^k Y^k H^l \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, то a однозначно восстанавливается по $\eta(a) = \sum a_{0,l} H^l$, и $\eta(a)$ может быть любым многочленом от H^2.

Отметим, что аналогичное вычисление с заменой $S(\mathfrak{g})$ на $U\mathfrak{g}$ и η на $\widetilde{\gamma}$ гораздо труднее из-за некоммутативности $U\mathfrak{g}$.

<u>Шаг 3.</u> Пусть $z \in Z \cap U_n\mathfrak{g}$. Проверим, что $\widetilde{\gamma}(z) \equiv \eta(\theta(z)) \mod S_{n-1}(\mathfrak{g})$. В самом деле,

$$z = \sum_{\sum p_i + \sum q_i + \sum m_i \le n} c_{(p_i),(m_i),(q_i)} Y_{\beta_1}^{q_1} \ldots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \ldots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \ldots X_{\beta_k}^{p_k}.$$

Тогда

$$\theta(z) \equiv \sum_{\sum p_i + \sum q_i + \sum m_i = n} c_{(p_i),(m_i),(q_i)} Y_{\beta_1}^{q_1} \ldots Y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \ldots H_r^{m_r} X_{\beta_1}^{p_1} \ldots X_{\beta_k}^{p_k} \mod S_{n-1}(\mathfrak{g}),$$

$$\eta(\theta(z)) \equiv \sum_{m_1 + \ldots + m_r = n} c_{(0),(m_i),(0)} H_1^{m_1} \ldots H_r^{m_r} \mod S_{n-1}(\mathfrak{h}).$$

С другой стороны,

$$\gamma(z) = \sum_{m_1 + \ldots + m_r \le n} c_{(0),(m_i),(0)} H_1^{m_1} \ldots H_r^{m_r},$$

и так как $\widetilde{\gamma}(z) = \tau(\gamma(z))$ (а τ — “замена переменной” вида $h \mapsto h - \rho$), то

$$\widetilde{\gamma}(z) \equiv \sum_{m_1+\ldots+m_r=n} c_{(0),(m_i),(0)} H_1^{m_1} \ldots H_r^{m_r} \mod S_{n-1}(\mathfrak{h}).$$

Теперь положим $\psi := \widetilde{\gamma}\theta^{-1}\eta^{-1}$. Таким образом, диаграмма

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[d, "\theta"] & S(\mathfrak{h})^W \\ S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\eta"] & S(\mathfrak{h})^W \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна. По доказанному ранее, если $a \in S_n(\mathfrak{h})^W := S_n(\mathfrak{h}) \cap S(\mathfrak{h})^W$, то $\psi(a) \equiv a \mod S_{n-1}(\mathfrak{h})$. В терминах полиномиальных функций $a \in S_n(\mathfrak{h})$ тогда и только тогда, когда $\deg p_a \leq n$. Таким образом, мы построили линейное отображение $\psi : \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W \to \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}^*)^W$ такое, что $\deg(\psi(p) - p) < \deg p$.

Упражнение 39. Отображение ψ биективно.

Так как θ, η и ψ биективны, то $\widetilde{\gamma}$ также биективно, что и требовалось доказать. □

Литература

1. *Knapp A.* Lie Groups Beyond an Introduction (Chapters 3 and 5).
2. *Серр Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли (часть 1, главы 3 и 7; часть 3, глава 7).
3. *Хамфри Дж.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений (главы 17 и 20–24).
4. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры (главы 2 и 7).
5. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли (глава 8, §§6–9).
6. *Fulton W., Harris J.* Representation Theory. A First Course.

Навчальне видання

Каролінський Євген Олександрович

Представлення напівпростих алгебр Лі

Редактор І. Ю. Агаркова
Коректор О. В. Гавриленко
Комп'ютерне верстання Є. О. Каролінський
Макет обкладинки І. М. Дончик, А. О. Бондаренко

Підп. до друку . Формат 60 × 80/16. Папір офсетний № 1.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 2,79. Обл.-вид. арк. 3,0.
Наклад 100 прим.

61077, Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Організаційно-видавничий відділ НМЦ

Надруковано ФОП Петрова І. В.
61144, Харків, вул. Гв. Широнінців 79-в, к. 137
Тел. 362-01-52

Свідоцтво про державну реєстрацію ВОО № 948011
від 03.01.03