1. Конструктивные объекты. Счетные множества

Домашнее задание

1.1. Показать, что следующие множества счетны, построив биекцию из них в $\mathbb{N}$ в явном виде:

1) множество четных чисел (включая 0 и отрицательные);

2) множество $\mathbb{N}^3$.

1.2. Показать, что следующие множества счетны, пользуясь свойствами счетных множеств:

1) $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

2) множество точек плоскости, обе координаты которых рациональны;

3) множество последовательностей произвольной, но конечной, длины, состоящих из целых чисел;

4) всякое множество непересекающихся квадратиков, лежащих внутри квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$.

1.3. Теорема Кантора. Показать, что множество точек отрезка $[0; 1]$ несчетно. Указание: записать числа отрезка десятичными дробями и воспользоваться диагональным методом.

2. Разрешимые и перечислимые множества

Домашнее задание

2.1. Показать разрешимость следующих множеств

1) всякое множество, дополнение которого конечно;

2) множество степеней двойки;

3) множество квадратов неотрицательных целых чисел.

2.2. Показать перечислимость следующих множеств

1) множество $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$;

2) множество решений уравнения $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$, где f – вычислимая функция.

2.3. Множества A, B разрешимы. Показать, что множества $A \setminus B$, $\overline{A}$ разрешимы.

2.4. Множества A, B перечислимы. Показать, что $A \cup B$ перечислимо.

2.5. Пусть A – некоторое подмножество в $\mathbb{Z}_+^n$ $(n > 1)$. Рассмотрим первые n простых чисел: $2, 3, \ldots, p_n$, и построим множество $B = \{2^{x_1}3^{x_2}\ldots p_n^{x_n} \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A\}$. Докажите, что A и B разрешимы или неразрешимы одновременно.

2.6. Докажите, что бесконечное множество A разрешимо тогда и только тогда, когда A есть множество значений строго возрастающей тотальной вычислимой функции.

3. Машины с неограниченными регистрами

Домашнее задание

3.1. Дана программа и начальные конфигурации.

1. Применить программу к данным начальным конфигурациям.

2. Нарисовать блок-схему программы.

3. Выяснить, для каких начальных конфигураций программа останавливается и сколько шагов при этом делает.

1)
$I_1: \quad T(3,2)$
$I_2: \quad J(1,3,6)$
$I_3: \quad S(1)$
$I_4: \quad S(2)$
$I_5: \quad J(1,1,1)$
$I_6: \quad S(3)$
$I_7: \quad S(1)$
$I_8: \quad J(1,2,12)$
$I_9: \quad S(2)$
$I_{10}: \quad S(3)$
$I_{11}: \quad J(1,1,9)$
$I_{12}: \quad S(1)$

$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}$ $\quad$ $\boxed{6}\boxed{5}\boxed{6}$

2)
$I_1: \quad J(1,4,9)$
$I_2: \quad S(3)$
$I_3: \quad J(1,3,7)$
$I_4: \quad S(2)$
$I_5: \quad S(3)$
$I_6: \quad J(1,1,3)$
$I_7: \quad T(2,1)$

$\boxed{4}$ $\quad$ $\boxed{0}$

3.2. Доказать, что функции МНР-вычислимы:

1) $f(x) = \begin{cases} 0, \ x = 0; \\ 1, \ x \neq 0; \end{cases}$

2) $f(x) = 4$;

3) $f(x,y) = 2x$;

4) $f(x,y) = \max(x, 2y)$.

4. Составление МНР-программ

Домашнее задание

4.1. Доказать, что функции МНР-вычислимы:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, x - \text{ кратно } 3; \\ \text{не определена, если } x \text{ не кратно } 3. \end{cases}$

2) $f(x, y) = \min(x, y)$;

3) $f(x, y) = |x - y|$;

4) $f(x, y, z) = \max(x, y) + z$.

4.2. Доказать разрешимость следующих предикатов (проблем), построив соответствующую МНР-программу.

1) $x > y$;

2) $x \neq 3$;

3) $xy = z$.

4.3. Используя программу, вычисляющую предикат «x кратно 2», построить программу, вычисляющую предикат «x – степень двойки».

5. Примитивно рекурсивные функции

Домашнее задание

5.1. Применить к функциям f и g оператор суперпозиции. Получить функцию h. Вычислить h в точке x_0.

a) $f = \begin{cases} 3k+2, & \text{если } k \leq 12, \\ 2k-5 & \text{если } k > 12. \end{cases}$ $g = \begin{cases} 4k+1, & \text{если } k \leq 8, \\ k-7 & \text{если } k > 8. \end{cases}$ $x_0 = 0, x_0 = 40.$

5.2. Применить к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x, y, z)$ оператор примитивной рекурсии и определить, какая функция $f(x, y)$ получится.

a) $\varphi(x) = x, \psi(x, y, z) = x + z$;

b) $\varphi(x) = x, \psi(x, y, z) = x + y$.

c) $\varphi(x) = x, \psi(x, y, z) = x^z$;

d) $\varphi(x)$ – произвольная функция, $\psi(x, y, z) = z^{a(x,y)}$, где $a(x, y)$ – некоторая фиксированная функция.

5.3. Доказать, что данные функции примитивно рекурсивны:

a) $f(x) = x + n$;

b) $\min\{x, y\}$;

c) x^x

d) $\sigma(x)$ — сумма делителей числа x ($\sigma(0) = 0$).

5.4. Доказать свойства усеченной разности:

a) $x + (y \dot{-} x) = y + (x \dot{-} y)$;

b) $x \dot{-} (y + z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z$

6. Частично рекурсивные функции. Рекурсивность предикатов

Домашнее задание

6.1. Доказать примитивную рекурсивность следующих предикатов:
1) $x = 2y$;
2) $x > 2y$;
3) x имеет не более y делителей;
4) $p_x > y$, где p_x – простое число с номером x.

6.2. Применить оператор минимизации и вычислить значение функции $g(x_0)$.
1) $g(x) = \mu_y[f(y) = x]$, где $f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = 7$;
2) $g(x) = \mu_y[f(y) = x]$, где $f(x) = \frac{x}{2}$, $x_0 = 6$.

6.3. Доказать, что следующие функции частично рекурсивны (предварительно указать их область определения):
1) $f(x, y) = \log_x y$ (считать $\log_0 0 = 1$, $\log_0 1 = 0$, $\log_1 1 = 1$).
2) наименьшее простое число, превосходящее x.

7. Машина Тьюринга: синтаксис, преобразование слов

Домашнее задание

7.1. Дана программа машины Тьюринга. Применить ее к заданным конфигурациям (записать работу пошагово). Головка смотрит на следующий за ней символ.

$P =$

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
0	$0Rq_4$	$0Rq_6$	$0Rq_6$	$1Sq_0$	$0Rq_4$	$0Sq_0$	$0Rq_6$
1	$1Lq_2$	$1Lq_3$	$1Lq_1$	$0Sq_5$	$0Sq_5$	$0Sq_7$	$0Sq_7$

a) $K_1 = 0q_1 1110$; b) $K_2 = 0q_1 101110011110$

7.2. Написать программу для машины Тьюринга, которая в алфавите $A = \{a, b\}$ для данного слова

1) оставляет на ленте только предпоследний символ слова (если слово состоит из одного символа, то лента должна остаться пустой);

2) удваивает каждый символ a и утраивает каждый символ b (например, из aba делает $aabbbaa$);

3) копирует данное слово (например, из ab делает $abab$);

4) выдает a, если в слове четное число букв, и пустую ленту в противном случае.

В начальный момент головка смотрит на первый символ слова.

Скачать машину и оттестировать программы можно, например, на openprog.ru/mashina-tyuringa

8. Машина Тьюринга: вычисление функций и предикатов

Домашнее задание

8.1. Написать программу для машины Тьюринга, которая
a) вычисляет остаток от деления числа $n \in \mathbb{Z}_+$ на 3;
b) вычисляет функцию $f(m,n) = |m-n|$;
c) вычисляет функцию $f(m,n) = \max\{m,n\}$;
d) прибавляет 2 к числу записанному в десятичной системе счисления;
e) переставляет местами две последовательности единиц.

8.2. Написать программу для машины Тьюринга, которая вычисляет предикат
a) $n = 3$;
b) n при делении на 4 дает остаток 1;
c) $n = m$.

9. Машина Тьюринга: композиция и ветвление

Домашнее задание

В следующих задачах можно использовать стандартные машины: П – перенос нуля, C^+, C^- – сдвиг головки вправо, влево, У – удвоение, Т – транспозиция, $Ц_n$ – циклический сдвиг, K_n – копирование. А также машины, вычисляющие функции 0, $x+y$, $x-y$, $x \dot{-} y$, $\mathrm{sg}(x)$, $\overline{\mathrm{sg}}(x)$, $\mathrm{qt}(2,x)$. *Если необходимы программы, не входящие в этот список, написать их самостоятельно.*

9.1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию $\mathrm{rm}(x,y)$ – остаток от деления y на x.

9.2. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию
1) $x!$;
2) x^y.

Указание: воспользоваться схемой вычисления на машине Тьюринга функции, полученной с помощью примитивной рекурсии.

9.3. Используя ветвление, построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию

1) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{если } x > 2; \\ x^2, & \text{иначе.} \end{cases}$

2) $f(x,y) = \max(x,y)$.

Скачать машину и оттестировать программы можно, например, на openprog.ru/mashina-tyuringa