1. Комплексные числа

1. Вычислить, пользуясь формулой Муавра $\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{70}$.

2. Изобразить на комплексной плоскости ГМТ, заданное условиями $|z-i| \geq 3$, $|\arg z| < \frac{\pi}{6}$.

3. Выразить $\sin^4 x$ через синусы и косинусы углов, кратных x.

4. Представить $\sin 7x$ в виде многочлена от $\sin x$, $\cos x$.

5. Решить уравнения. а) $z^3 = 125i$; б) $z^2 - (5+2i)z + 9 + 7i = 0$.

6. Вычислить сумму $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1}$, где ε – первообразный корень степени n из 1.

2. Многочлены одной переменной

1. Разложить данные рациональные функции в сумму вещественных простейших дробей:
$\dfrac{-x+7}{x^2+x-2}$; $\dfrac{2\,x^3+7\,x^2+2\,x+2}{(x+1)^3\,(x-4)}$

2. С помощью алгоритма Евклида найти наибольший общий делитель $f(x)=x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12$ и $g(x)=x^4+3x^3-6x^2-22x-12$.

3. Найти все значения параметра b, при которых многочлен x^4-4x^2+b имеет двойной корень, отличный от 0.

4. Корни квадратного трехчлена $2x^2-3x-1$ равны x_1 и x_2. Не находя x_1, x_2, составить многочлен наименьшей степени, корнями которого будут $y_1=\frac{1}{x_1}$, $y_2=\frac{1}{x_2}$

5. При каких значениях b многочлен $(t+1)^{3b}-t^2b-1$ делится на t^2+t+1?

3. Системы линейных уравнений

1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений в зависимости от параметров.

$$\begin{cases} x + y + cz = 4 \\ x + by + z = 3 \\ 2bx + y + z = 4 \end{cases}$$

4. Линейные пространства

1. Проверьте, является ли линейным подпространством соответствующего линейного пространства следующая совокупность векторов: совокупность векторов, у которых все нечетные координаты равны 1.

2. Проверьте, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$ и найдите координаты вектора x в этом базисе: $a_1 = (2, -1, -2)$, $a_2 = (3, 0, -1)$, $a_3 = (2, 1, 4)$, $x = (-1, -2, 1)$.

3. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов p_1, p_2, p_3, p_4 пространства многочленов $\mathbb{R}_3[t]$: $p_1(t) = 4t^3 - t^2 + 2t + 1$, $p_2(t) = 8t^3 - 2t^2 + 4t + 2$, $p_3(t) = 11t^3 + 2t^2 - t + 1$, $p_4(t) = t^3 - 10t^2 + 6t + 2$.

4. Найти базис суммы и пересечения линейных подпространств $L_1 = Lin\{a_1, a_2, a_3\}$, $L_2 = Lin\{b_1, b_2\}$, где $a_1 = (1, -3, 1, 1)$, $a_2 = (2, -1, 0, 1)$, $a_3 = (1, 0, 2, 2)$, $b_1 = (2, 0, 1, 3)$, $b_2 = (1, -2, 2, 3)$

5. Верно ли, что пространства $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^3$ изоморфны?

5. Линейные операторы

1. Проверьте, что преобразование $\varphi(x) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3, x_1 + 4x_2 + x_3, 7x_2)$ пространства $\mathbb{R}^3$ является линейным оператором и найдите его матрицу в базисе, в котором заданы координаты вектора x. Выясните, является ли φ невырожденным оператором.

2. Найдите ядро и образ линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 7 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Оператор φ задан в базисе $a_1 = (2, -3)$, $a_2 = (-3, 5)$, матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Оператор ψ задан в базисе $b_1 = (2, -1)$, $b_2 = (5, -3)$ матрицей $B_\psi = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу оператора $\varphi\psi$ в базисе $\{e_1, e_2\}$, в котором даны координаты всех векторов.

4. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Квадратичные формы

1. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $Q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
2. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму $Q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$. Найти невырожденное преобразование координат и базис, в котором квадратичная форма имеет этот канонический вид.
3. Квадратичную форму $Q(x) = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ привести к главным осям в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

7. Основные понятия теории групп

1. Проверить, что подмножество H является подгруппой в группе G.
$G = \mathbb{Q}$, H — множество рациональных чисел вида $\dfrac{m}{3^n}$, где m— целое, n — целое неотрицательное.
2. а) Найти все образующие группы $\mathbb{Z}(20)$;
   б) Найти все подгруппы данной группы и написать, какие элементы составляют каждую подгруппу.
3. Проверить, что отображение f является гомоморфизмом групп, найти его ядро и образ. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, α — некоторое фиксированное действительное число
4. Проверить, что $N \triangleleft G$, и показать, что $G/N \cong H$.
$G = R^*$, $N = R^*_+$, $\mathbb{H} = \mathbb{Z}(2)$.
5. Найти порядок подстановки $(123)(45)(67)$ в группе S_9. Вычислить централизатор этой подстановки.