1. Метод математической индукции

Домашнее задание

1.13. Доказать тождество $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1.14. Доказать тождество $1^5 + 2^5 + \ldots n^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$.

1.15. Доказать неравенство $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

1.16. Доказать, что неравенство $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \ldots + \sqrt{4}}} < 3$ выполняется для любого количества корней в левой части.

1.17. Доказать, что для каждого натурального числа n число $15^n + 6$ делится на 7.

1.18. Вычислить произведение $\dfrac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \dfrac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$.

2. Основные правила комбинаторики. Биномиальные коэффициенты. Бином Ньютона.

Домашнее задание

2.8. С помощью метода мат. индукции доказать

a)

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

b) формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

2.9. Решить уравнения

a) $120 C_{n+4}^{n-1} = 72 A_{n+2}^3$;

b) $C_n^3 + C_n^2 = 15(n-1)$.

2.10. Найти количество 5-элементных подмножеств множества из 7 элементов.

2.11. У Тани — 20 марок, у Наташи — 30. Сколько существует способов обменять 2 Таниных марки на 3 Наташиных?

2.12. Сколько существут четырехзначных чисел, цифры которых расположены в неубывающем порядке?

3. Свойства конечных множеств. Алгебра множеств.

Домашнее задание

3.13. Школьники поехали на экскурсию. Бутерброды с колбасой взяли 48 человек, с сыром — 38 человек, с ветчиной — 42 человека, с сыром и колбасой — 28 человек, с колбасой и с ветчиной — 31 человек, а с сыром и с ветчиной — 26 человек. 25 школьников взяли с собой все три вида бутербродов. Сколько школьников отправилось на экскурсию, если все они запаслись бутербродами?

3.14. Каждый десятый математик является философом, а каждый сотый философ является математиком. Кого больше: философов или математиков?

3.15. (дополнительная задача) Доказать, что

$$|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{j_1 < \ldots < j_k} |A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}|$$

3.16. Доказать тождества

a) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

b) $(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$.

3.17. Доказать

a) $A \cup B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$ и $B \subset C$;

b) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$;

c) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

3.18. Упростить выражения, пользуясь основными свойствами теоретикомножественных операций.

a) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B$;

b) $(A \cap B \cap C \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap X)$.

4. Алгебра множеств – 2.

Домашнее задание

4.10. Пусть U — множество всех работников института, A — множество работников института, владеющих английским языком, F — французским, N — немецким. Записать на языке теории множеств:

a) множество работников института, владеющих хотя бы одним из указанных трех языков;

b) множество работников института, владеющих ровно двумя из указанных языков;

c) множество работников института, которые владеют только английским либо не владеют ни одним из указанных языков.

Изобразить полученные множества с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

4.11. Доказать (показав включения $\subset$ и $\supset$) равенство множеств A и B:

a) A — множество выпуклых четырехугольников, у которых все стороны равны, B — множество параллелограммов, у которых диагонали пересекаются под прямым углом.

b) $A = \mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, B — множество чисел, представимых в виде суммы обыкновенных дробей с числителями, равными по модулю единице.

4.12. Следует ли из равенства $A = B \cup C$, что $A \setminus B = C$?

4.13. Построить контрпримеры к утверждениям:

a) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4.14. Известно, что $A \subset X$ и $B \subset X$. Показать, что $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

5. Биекции. Равномощность множеств.

Домашнее задание

5.7. Является ли отображение f инъекцией? Сюръекцией? Биекцией?

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = (-1)^n n$;

b) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $f(m, n) = (m + 1, n - 2)$.

5.8. Установить взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B:

a) $A = (-1, 4]$, $B = [3; +\infty)$;

b) A — множество всех биекций n-элементного множества на себя, B — множество всех перестановок n элементов.

5.9. Докажите, что число последовательностей из нулей и единиц длины n, у которых ровно k единиц, равно числу k-элементных подмножеств n-элементного множества.

5.10. Показать, что

a) любые два квадрата на плоскости равномощны;

b) множество всех прямых плоскости равномощно множеству всех точек плоскости.

5.11. Показать, что следующие множества являются счетными:

a) $\mathbb{Z}^k$, то есть множество последовательностей длины k, состоящих из целых чисел (указание: воспользоваться мат. индукцией);

b) множество последовательностей произвольной, но конечной, длины, состоящих из целых чисел (указание: воспользоваться предыдущим пунктом);

c) всякое множество непересекающихся квадратиков, лежащих внутри квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$.

5.12. Показать, что если $|A| = |A_1|$, $|B| = B_1|$ и $A \cap B = \emptyset$, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A_1 \cup B_1|$.

6. Отношение на множестве. Отношение эквивалентности

Домашнее задание

6.5. Верно ли, что $R \circ R^{-1} = \Delta$ для всякого отношения $R \subset A^2$? ($\Delta = \{(x,x) \mid x \in A\}$).

6.6. Найти области определения и значений отношений:

a) $R = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = mk\}$;

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x > 3y\}$.

Найти R^2 и R^{-1} для каждого из этих отношений.

6.7. Построить графики следующих отношений. Выяснить являются ли эти отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными.

a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$;

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$;

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$;

6.8. Показать, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве A. Построить фактор-множество $A/_\sim$. Построить какую-нибудь систему представителей для фактор-множества.

a) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\quad x \sim y \Leftrightarrow xy > 0$ (сравнить с предыдущей задачей);

b) $A = \mathbb{C}$, $\quad z \sim w \Leftrightarrow |z| = |w|$.

6.9. Привести примеры

a) отношения, рефлексивного и симметричного, но не транзитивного, на некотором множестве;

b) отношения, рефлексивного и транзитивного, но не симметричного, на некотором множестве;

c) отношения, симметричного и транзитивного, но не рефлексивного, на некотором множестве;

7. Отношение сравнения по модулю. Отношение порядка

Домашнее задание

7.10. Какой остаток при делении на 3 дает число $40^{40} + 80^{80} - 70^{70} - 10^{10}$?

7.11. Вычислить остаток при делении на 9 чисел

a) 7^{777}; b) $2009 \cdot 2010 \cdot 2011 + 2012^2$.

7.12. Делится ли $2222^{5555} + 5555^{2222}$ на 7?

7.13. Решить уравнения

a) $4x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7)$;

b) $x^2 + 6x + 5 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 9)$.

7.14. На какие цифры может заканчиваться квадрат натурального числа?

7.15. Пусть $(X, \leq_X)$ и $(Y, \leq_Y)$ — частично упорядоченные множества. Определим на декартовом произведени $X \times Y$ отношение $\leq$ следующим образом: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, если $x_1 <_X x_2$, а в случае равенства $x_1 = x_2$, если $y_1 \leq_Y y_2$. Показать, что $\leq$ есть отношение порядка на $X \times Y$, причем, если $\leq_X$, $\leq_Y$ были линейными отношениями порядка, то $\leq$ тоже линейно.

7.16. Построить диаграммы Хассе следующих частично упорядоченных множеств

a) $M = \{A, B, C, D, E\}$, упорядоченное по включению, где $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d, e\}$, $C = \{a, c, d\}$, $D = \{a, c, d, f\}, E = \{a\}$;

b) множество делителей числа 30, упорядоченное по делимости;

c) множество подмножеств четырехэлементного множества.

Указать в данных множествах максимальные и минимальные элементы. Указать наибольший и наименьший элемент, если они существуют.

7.17. Пусть $<$ — некоторое антирефлексивное и транзитивное отношение на множестве A. Определим отношение $\leq$ на A так: $x \leq y$, если $x < y$ или $x = y$. Показать, что $\leq$ есть отношение порядка.

7.18. (дополнительная задача) Доказать, что во множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (упорядочение покоординатное) нет бесконечного подмножества, любые два элемента которого несравнимы. Верно ли аналогичное утверждение для $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

8. Изоморфизм ч.у.м. Вполне упорядоченные множества

Домашнее задание

8.9. Изоморфны ли следующие пары множеств:

a) $M = \{A, B, C, D, E, F\}$, где $A = \{a, b, c, \}, B = \{a\}, C = \{a, b\}, D = \{a, b, c, d\}, E = \{a, c, d\}, F = \{a, c\}$ (упорядочение по включению); L — множество делителей числа 12 (упорядочение по делимости);

b) множество всех делителей числа 2^{n-1}, упорядоченное по делимости, и линейно упорядоченное n-элементное множество A $(n \in \mathbb{N})$;

c) множество рациональных точек из $(0, 2)$ и множество рациональных точек из $(1, \sqrt{3})$?

8.10. Построить два различных нетождественных автоморфизма упорядоченного множества $\mathbb{Z}$ на себя.

8.11. Являются ли вполне упорядоченными множества

a) четных натуральных чисел;

b) четных целых чисел;

c) рациональных чисел?

8.12. Пусть A и B вполне упорядоченные множества, причем $A \cap B = \emptyset$. Определим порядок на множестве $A \cup B$ так: $x \leq y$, если $x \leq y$ в A либо B или же, если $x \in A$, $y \in B$. Показать, что относительно такого порядка $A \cup B$ является вполне упорядоченным множеством.

8.13. Студент Иван разменивает деньги в автомате. Автомат берет одну монету, а взамен выдает любой набор монет меньшего достоинства по выбору Ивана. Докажите, что наступит момент, когда автомат не сможет ничего выдать Ивану.

9. Логика высказываний

Домашнее задание

9.12. Расчленить следующие высказывания на простые, ввести обозначения и записать в символах.

a) Если в параллелограмме не все углы прямые либо не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб.

b) Неверно, что если дует ветер, то солнце светит только тогда, когда нет дождя.

c) Погода будет не только пасмурной, но и дождливой, несмотря на ветер. Значит, солнечной погоды не будет, разве что прекратится дождь.

9.13. Построить отрицания к следующим высказываниям. Записать в символах.

a) Коля сдаст экзамен, если сумеет достать шпаргалку.

b) На пересдачу пойдет либо Коля, либо Петя.

c) Если экзамен будет в понедельник, то никто из студентов — Петя, Ваня, Коля — не сдаст этот экзамен.

9.14. Построить таблицы истинности следующих формул:

a) $\overline{x \Rightarrow \overline{y \wedge x}} \Rightarrow x \vee z$;

b) $(x \wedge (y \vee \bar{x})) \wedge ((\bar{y} \Rightarrow x) \vee y)$.

9.15. Доказать тождественную истинность формул с помощью таблиц истинности

a) $x \Rightarrow (y \Rightarrow (x \wedge y))$;

b) $(x \Rightarrow z) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow ((x \vee y) \Rightarrow z))$.

9.16. Доказать законы дистрибутивности для операций конъюнкции и дизъюнкции.

9.17. При каких значениях переменных ложна формула
$(x \vee y \vee z) \Rightarrow ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$?

9.18. Упростить формулы

a) $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \vee (x \Rightarrow y) \wedge x$;

b) $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.

9.19. Построить формулу от трех переменных x, y, z, которая

a) истинна тогда и только тогда, когда все переменные ложны;

b) ложна тогда и только тогда, когда истинны x и y.

10. ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ + применение алгебры логики

Домашнее задание

10.10. Привести следующие формулы к ДНФ и КНФ с помощью равносильных преобразований. Затем получить СДНФ из ДНФ и СКНФ из КНФ.

a) $a \wedge (b \wedge c \Rightarrow a \wedge b)$; b) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow \overline{z}) \Rightarrow (x \Rightarrow \overline{y}))$.

10.11. Построить таблицу истинности формулы и получить для этой формулы СДНФ и СКНФ:

a) $(\overline{x} \Rightarrow z) \Rightarrow (\overline{\overline{y} \Rightarrow \overline{x}})$; b) $\overline{a \wedge (b \vee c)} \Rightarrow ((a \wedge b) \vee c)$.

10.12. Найти СКНФ тождественно ложной формулы, содержащей ровно a) две переменных; b) три переменных.

10.13. Булева функция от трех переменных задана своими значениями (на наборах, записанных в стандартном порядке):
$f = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$. Найти соответствующую ей формулу. Упростить формулу.

10.14. Составить релейно-контактные схемы для формул:

a) $(x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x \wedge y \wedge z}) \vee (\overline{x} \wedge y)$; b) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (y \Rightarrow \overline{x})$.

10.15. Четыре студентки (А, Е, С, Р) ходят в институт по очереди и ведут общий конспект. Составьте график посещения лекций на ближайшую неделю, учитывая, что

1. Понедельник — день самостоятельной работы, и в институт не ходит никто, а в субботу нужно быть всем.

2. С и Р не могут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.

3. Если С выйдет в среду или Р — в четверг, то Е согласится побывать на занятиях в пятницу.

4. Если А не пойдет в институт в четверг, то Е пойдет туда в среду.

5. Если А или Р будут в институте в среду, то С сможет пойти в пятницу.

6. Если Р в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то А придется сходить в институт во вторник, а С — в четверг.

11. Язык логики предикатов. Операции над предикатами.

Домашнее задание

11.11. Ввести предикаты и записать на языке логики предикатов следующие утверждения:

a) через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость;

b) если произведение нескольких натуральных чисел делится на простое число, то на него делится по крайней мере один из сомножителей;

c) если число a является корнем многочлена с вещественными коэффициентами, то комплексно сопряженное число $\overline{a}$ тоже является корнем этого многочлена.

11.12. Пусть на множестве $\mathbb{Z}_+$ заданы следующие предикаты: $S(x, y, z) =$ "$x + y = z$", $P(x, y, z) =$ "$xy = z$". Записать с помощью этих предикатов следующие предложения:

a) $x = 1$; b) x — простое число;

c) всякое четное число, большее двух, есть сумма двух простых;

d) существует наибольшее натуральное число.

11.13. Переменные определены на множестве $\mathbb{R}$. Перевести высказывания на русский язык. Определить, какие из них являются истинными, а какие ложными. Построить к ним отрицания.

a) $\forall x\,[((x > 1) \wedge (x < 2)) \Leftrightarrow (x = x)]$;

b) $\exists b :\ \forall a\,\exists x :\ x^2 + ax + b = 0$;

c) $\forall x\,\forall y\,(x + y > 3)$.

11.14. С помощью кванторов построить все возможные высказывания из следующих предикатов (на $\mathbb{R}$). Выяснить, какие из них истинны, а какие ложны: a) $x^2 = 100$; b) $\sin x = \sin y$.

11.15. $M = \{1, ..., 20\}$. На M заданы следующие предикаты $A(x) =$"x не делится на 5", $B(x) =$"x — четное", $C(x) =$"x — простое, $D(x) =$"x кратно 3". Найти множества истинности следующих предикатов: $\overline{D}(x) \vee B(x)$, $A(x) \wedge D(x) \Rightarrow \overline{C}(x)$.

12. Формулы логики предикатов. Необх. и дост. условия.

Домашнее задание

12.10. Привести пример интерпретации, в которой данная формула превращается в истинное высказывание:

a) $\exists x : (P(x) \wedge Q(x))$;

b) $\exists y : \forall x\, Q(x, y)$;

c) $\forall x \exists y : (P(x, y) \vee (Q(x, y) \wedge R(x, y)))$

12.11. Являются ли выполнимыми формулы

a) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$;

b) $P(x) \Rightarrow \forall y P(y)$?

12.12. Пусть предикат $P(x, y) =$ "x делит y" определен на множестве $\mathbb{N}$. Являются ли тождественно истинными предикаты:

a) $\exists y P(x, y)$; b) $\forall x P(x, y)$?

12.13. Найти отрицания формул. Выбрать интерпретацию и записать в ней формулы и их отрицания.

a) $\exists x : (A(x \wedge B(x) \wedge C(x)))$;

b) $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge \exists x(S(x) \wedge \overline{R}(x))$.

12.14. Доказать равносильности формул:

a) $B \vee \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x(B \vee A(x))$;

b) $\forall x(A(x) \Rightarrow B)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \Rightarrow B$.

12.15. Указать необходимое, но не достаточное условие того, что

a) четырехугольник является квадратом;

b) точка является экстремумом дифференцируемой функции на отрезке;

c) множество является счетным.

12.16. Указать достаточное, но не необходимое условие того, что

a) уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней;

b) последовательность имет конечный предел.

12.17. Сформулировать критерий (не совпадающий с определением)

a) равнобедренного треугольника;

b) первообразного корня степени n из единицы;

c) тождественно истинной формулы алгебры логики.

13. Машина Тьюринга

Домашнее задание

13.6. Дана программа машины Тьюринга. Применить ее к заданным конфигурациям (записать работу пошагово). Головка смотрит на следующий за ней символ.

$P =$

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
0	$0Rq_4$	$0Rq_6$	$0Rq_6$	$1Sq_0$	$0Rq_4$	$0Sq_0$	$0q_6R$
1	$1q_2L$	$1Lq_3$	$1q_1L$	$0Sq_5$	$0Sq_5$	$0Sq_7$	$0Sq_7$

a) $K_1 = 0q_11110$; b) $K_2 = 0q_1101110011110$

13.7. Написать программу для машины Тьюринга, которая

a) вычисляет остаток от деления числа $n \in \mathbb{N}$ на 3;

b) вычисляет функцию $f(m, n) = |m - n|$ $(m, n \in \mathbb{N})$;

c) вычисляет функцию $f(m, n) = max\{m, n\}$ $(m, n \in \mathbb{N})$;

d) прибавляет 2 к числу записанному в десятичной системе счисления;

e) переставляет местами две последовательности единиц.

13.8. Написать программу для машины Тьюринга, которая вычисляет предикат

a) $n = 3$;

b) n при делении на 4 дает остаток 1;

c) $n = m$.

14. Рекурсивные функции

Домашнее задание

14.1. Применить к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x,y,z)$ оператор примитивной рекурсии. Получить функцию $f(x,y)$ и ее аналитическое выражение.

a) $\varphi(x) = x, \psi(x,y,z) = x + z$;

b) $\varphi(x) = x, \psi(x,y,z) = x + y$.

14.2. Применить оператор минимизации и вычислить значение функции $g(x_0)$.

a) $g(x) = \mu_y[f(y) = x]$, где $f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = 7$;

b) $g(x) = \mu_y[f(y) = x]$, где $f(x) = \frac{x}{2}$, $x_0 = 6$.

14.3. Доказать, что данные функции примитивно рекурсивны:

a) $f(x) = x + n$;

b) $\min\{x, y\}$;

c) $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

d) $r(x,y)$ — остаток от деления x на y ($r(x,0) = x$);

e) $\sigma(x)$ —сумма делителей числа x ($\sigma(0) = 0$).

14.4. Доказать свойства усеченной разности:

a) $x + (y \dot{-} x) = y + (x \dot{-} y)$;

b) $x \dot{-} (y + z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z$